匈牙利数学竞赛问题赏析

——重读《匈牙利数学竞赛题解》

冷岗松　叶思

匈牙利是国际上开展数学竞赛最早的国家. 匈牙利最著名的数学竞赛是 Kürschák 竞赛, 它起源于 1894 年, 迄今已有 120 多年的历史了. 1979 年科学普及出版社出版了由库尔沙克等编著, 胡湘陵译的《匈牙利数学竞赛题解》. 该书介绍了 Kürschák 竞赛从 1894 年到 1974 年的试题及解答, 并有大量的点评. 这是一本高质量的书. 书中的解答清晰流畅, 展现了想法的自然性, 许多题还有多个解. 书中的点评更是精彩! 作者娓娓道来, 既揭示问题的背景及与研究前沿的关系, 又注重挖掘问题之间的联系.

我们认为 Kürschák 竞赛问题的风格可概括为四个字, 这就是: *厚重与优雅*. 所谓厚重是指这些问题数学上意义丰富、背景深刻, 而优雅是指这些问题简洁、自然且不落俗套.

本文从该书中选取若干问题, 以现代的语言重写了解答, 并加以点评, 供大家欣赏. 点评中的不少观点还是源于该书. 值得说明的是, 由于篇幅所限, 本文仅挑选了我们感兴趣的部分问题, 不少精彩的问题没能选入. 当然, 我们最担心的是本文的注记是否有曲解之处.

1. 整点多边形

题 1 (1939 年). *若整点平行四边形的内部或边上还有另外的整点, 则这个平行四边形的面积大于 1.*

解法提示　将这个整点与平行四边形的 4 个顶点连接起来, 则将该平行四边形至少划分为三个非蜕化的整点三角形, 然后说明每一个非蜕化的整点三角形的面积不小于 $\frac{1}{2}$ 便可.

点评　该结论的逆命题也是成立的: 如果整点平行四边形内部或边界上不

收稿日期: 2016-06-02;　第一次修订: 2016-10-12;　第二次修订: 2017-03-10.

再含其它整点, 则它的面积等于 1. 这通常表述为: 一个基本的整点平行四边形的面积等于 1. 这已是组合几何中的基本结论. 它的代数等价形式是下面的题 2.

题 2 (1942 年). 设 a, b, c, d 是整数且使得方程组

$$ax+by=m, \quad cx+dy=n$$

对所有的整数 m, n 都有整数解. 证明: $ad-bc=\pm 1$.

题 3 (1955 年). 证明: 如果一个整点三角形的三边上不再含有其它的整点, 但在三角形内有唯一的一个整点, 则这个三角形的重心和这个内部的整点重合.

解法提示　注意到下面两个基本结论可立得本题的论断:

第一个基本结论是 Kürschák 竞赛 1936 年的问题: 若 $\triangle ABC$ 内部的一点 S 使得 $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle ACS$ 的面积相等, 则 S 是 $\triangle ABC$ 的重心;

第二个基本结论是: 基本整点三角形的面积等于 $\frac{1}{2}$. 这本质上就是上面两题的结论.

点评　**(1).** 本题结论有一个有趣的等价描述: 若整点平行四边形的边界上没有另外的整点, 且在内部有两个整点, 则这两个整点在平行四边形的对角线上且把它分成相等的三部分.

(2). 大多数关于三角形重心的结果似乎都能发展到空间, 但稍使我们诧异的是, 本题的断言的空间类比是不成立的. 即存在这样的整点四面体其边界面不含有其它的整点, 且在它的内部只有一个整点, 但它并不是重心. 例子: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(2,2,5)$ 为顶点的四面体, 它的内部只有一个整点 $R(1,1,2)$, 但它显然不是这个四面体的重心.

(3). 下面我们讨论本题与法雷 (Farey) 序列的关系. 所谓法雷序列可以这样定义: 对任意给定的正整数 n, 我们把所有分母小于或等于 n 的真分数按增加顺序排列, 且在第一个分数的前面加上数 $\frac{0}{1}$, 而在最后一个分数的后面加上数 $\frac{1}{1}$, 这样得到的一组数通常称为 n 级法雷序列.

例如, F_7 就是:

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}.$$

首先我们来研究法雷序列 F_n 中真分数的个数是多少? 设 F_n 中真分数的个数为 $\varphi(n)$, 注意到 $\varphi(n)$ 比 $\varphi(n-1)$ 增加的个数是分母是 n, 分子比 n 小且与 n 互质的数的个数, 这正是欧拉函数 $\phi(n)$, 因此

$$\varphi(n)=\varphi(n-1)+\phi(n).$$

由这个递归关系易得

$$\varphi(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\phi(k).$$

现在我们研究法雷序列的整点表示: 对 F_n 中的每一个真分数 $\frac{h}{k}$ $(0<h\leq k\leq n)$, 让其对应着整点 (k,h). 分数 $\frac{h}{k}$ 的不可约性意味着在连接整点 (k,h) 和坐标原点 O 的线段上再没有其它整点. 关于这个点可以形象地说, 从坐标原点 O 可以看见它, 因此常称它为可见点.

设法雷序列 F_n 中相邻两项 $\frac{h}{k}$ 和 $\frac{h'}{k'}$ 对应的整点分别为 P 和 P', 则可以证明下面重要的事实:

三角形 OPP' 是一个基本整点三角形, 从而面积等于 $\frac{1}{2}$.

从这个几何事实出发, 我们可以证明法雷序列的两个常用性质:

性质 1. 对 F_n 中相邻两项 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 有:

$$bc-ad=1.$$

性质 2. 对 F_n 中相邻三项 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ 有:

$$\frac{c}{d}=\frac{a+e}{b+f}.$$

性质 2 可用几何语言描述如下: 如果一个整点三角形包含和它的顶点不同的整点, 且这些整点分布在通过三角形的一个顶点的直线上, 则这条直线和三角形的中线重合.

由这个几何事实便可立得本题的结论. 因此, 本题是上述法雷序列性质 2 的一个推论.

法雷序列是处理整点问题的强有力工具. 有兴趣者还可研究怎样用法雷序列求解 2011 年中国国家队选拔考试:

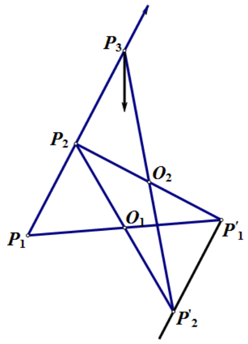
直角坐标平面上的一个点列 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 称为“有趣的”, 如果每个 A_i 的横坐标与纵坐标都是正整数, 直线 $OA_0,OA_1,\cdots,A_n$ 的斜率严格递增 (O 是原点), 并且三角形 OA_iA_{i+1} $(0\leq i\leq n-1)$ 的面积均为 $\frac{1}{2}$. 现在一个点列 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 的某相邻两点 A_i,A_{i+1} 之间插入一个点 A, 满足 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+1}}$, 则称新点列 $(A_0,\cdots,A_i,A,A_{i+1},\cdots,A_n)$ 为原点列的一次“扩张”. 设 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 与 $(B_0,B_1,\cdots,B_m)$ 是任意两个有趣点列. 证明: 若 $A_0=B_0,A_n=B_m$, 则可对两个点列分别作有限次扩张得到相同的点列.

2. 对称点集

题 4 (1935 年). 如果集 H 的任意一点关于点 O 的对称点仍然属于 H, 则

称 O 是 H 的对称中心. 证明: 有限点集不可能有两个不同的对称中心.

解 设点集 H 有两个对称中心 O_1 和 O_2. 任取 $P_1 \in H$, 设 P_1' 是 P_1 关于 O_1 的对称点, P_2 是 P_1' 关于 O_2 的对称点, P_2' 是 P_2 关于 O_1 的对称点, P_3 是 P_2' 关于 O_2 的对称点.



注意到 O_1O_2 分别是 $\triangle P_1P_1'P_2$ 和 $\triangle P_2P_2'P_3$ 的中位线, 因此 $P_1P_2 \parallel P_2P_3 \parallel O_1O_2$, 且 $P_1P_2 = P_2P_3 = 2O_1O_2$. 故线段 P_2P_3 是线段 P_1P_2 的等长延伸.

现在从点 P_3 开始, 作出它关于 O_1 的对称点, 然后再作所得到的点关于 O_2 的对称点, 如此等等, 无限重复下去, 我们就会得到直线 P_1P_2 上的无穷多个线段, 其长度都等于线段 P_1P_2 的长, 而且是一个接着一个地延伸. 这与 H 为有限点集矛盾! 这说明有限点集 H 只有一个对称中心. □

点评 (1). 从上面的证明我们还可得到:

(a) 任何点集若有两个对称中心, 则它是无穷集合;

(b) 如果一个点集的对称中心多于一个, 则这个点集是无界的, 亦即: 有界点集至多只有一个对称中心;

(c) 如果一个点集有两个对称中心, 那么它有无穷多个对称中心.

(2). 现在我们再研究具有对称中心的有限点集的特征. 先引进有限点集质心的定义: 设 $\Gamma = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 是一个有限点集. 选取任意一个始点 O, 作矢径 $\overrightarrow{OP_i} = \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 若点 S 的矢径 $\overrightarrow{OS} = \mathbf{s}$ 满足关系式

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n}{n},$$

则点 S 叫做点集 Γ 的质心.

下面证明质心 S 的定义与始点 O 的选取无关. 事实上, 将定义中的关系式写成形式

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{s}) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{s}) + \cdots + (\mathbf{p}_n - \mathbf{s}) = \overrightarrow{0},$$

进一步, 根据矢量的减法可写成形式

$$\overrightarrow{SP_1}+\overrightarrow{SP_2}+\cdots+\overrightarrow{SP_n}=\overrightarrow{0}. \tag{$*$}$$

此式说明点 S 的定义与始点 O 的选取无关.

现在我们来证明: 若有限点集 Γ 具有对称中心 O, 则 O 和 Γ 的质心 S 重合. 事实上, 只要注意到任何关于 O 对称的两个点 A 和 B 均有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}$, 当把 Γ 的所有点分成关于对称中心 O 对称的点对时, 便知 O 使得 $(*)$ 成立, 因此 O 和质心 S 重合.

因为有限点集只有一个质心, 上面的结论也说明一个有限点集至多有一个对称中心.

3. 完全图问题

题 5 (1947 年). 证明: 在任何 6 人中总存在 3 人彼此认识或 3 人彼此不认识.

解法提示 考虑从一点出发 5 条线段两染色后, 同色的三条线段的端点三角形便可.

点评 **(a).** 这个断言可用图论语言叙述为: 设 G 是任意一个有 6 个顶点的图, 则要么是图 G, 要么是它的补图 $\overline{G}$ 包含一个完全子图 K_3.

(b). 这个结论也用图论语言可叙述为不太对称的形式: 如果在 6 个顶点的图中, 任何 3 个顶点之间有 2 个顶点有边相连, 则它包含一个完全子图 K_3.

(c). 进一步, 我们可提出较 (b) 更一般的问题: 是否对每个正整数 k 都存在数 $n(k)$, 使得在至少有 $n(k)$ 个顶点的图中, 若任何三个顶点中有两个顶点有边相连, 则这样的图包含一个完全子图 K_k? 如果这样的 $n(k)$ 存在, 其最小的值是多少?

利用上面题 5 的结论, 可对 (c) 中问题作一个初步的回答: $n(k)$ 的最小值不能小于 $3k-3$. 先看下面的:

题 6 (1952 年). 设 $n>1, n\in\mathbf{N}^*, X=\{1,2,\cdots,3n\}$. 证明: 若 A 是 X 的 $n+2$ 元子集, 则存在 $a,b\in A$ 使得 $n<b-a<2n$.

解 不妨设 A 中最大的数为 $3n$, 否则作一平移变换使 A 中最大数变为 $3n$, 而不影响问题的结论.

下分两种情况:

1) 若 $n+1,n+2,\cdots,2n-1$ 中的某一个属于 A, 则 $3n$ 与这个数满足要求.

2) 若 A 不包含 $n+1, n+2, \cdots, 2n-1$ 中的任何一个, 这说明 A 中除 $3n$ 的另外 $n+1$ 个元来自数对:

$$(1,2n),\quad (2,2n+1),\quad \cdots,\quad (n,3n-1).$$

因上面的数对总共只有 n 对, 所以由抽屉原理知 A 中必有两数来自同一个数对, 从而这两个数满足要求. □

点评 由本题我们可推出如下的结论:

对任意正整数 $n \geq 2$, 存在一个 $3n$ 个顶点的图使得其中任何 3 个顶点中有 2 个顶点有边相连, 而且不包含完全子图 K_{n+2}.

事实上, 我们可如此构造 $3n$ 个顶点且满足要求的图: 沿着单位圆周彼此等距离放置 $3n$ 个点作为图的顶点, 并用 1 到 $3n$ 的自然数来编号, 而且每一个顶点和 n 个前面的顶点及 n 个后面的顶点用边连接. 这时, 两个顶点之间没有连边当且仅当它们的编号之差大于 n 而小于 $2n$. 因此由本题的结论知, 在这 $3n$ 个点中的任何 $n+2$ 个点中总可找到两个没有边相连的顶点. 另一方面, 在任何三个顶点中总存在两个顶点有边相连, 这是因为如果三个顶点的编号 $a<b<c$ 且 $c-a<2n$, 那么差 $b-a$ 和 $c-b$ 中总有一个小于 n. 这样就完成了上述结论的证明.

利用这个结论, 我们可立得题 5 中问题 (c) 要求的 $n(k)$ 的最小值 $\geq 3k-3$.

4. 从匹配到哈密尔顿图

题 7 (1964 年). *某工厂生产由六种不同颜色的纱织成的双色布. 在这个工厂所生产的双色布中, 每一种颜色至少和三种其它的颜色搭配. 证明: 可以挑出三种不同的双色布, 它们含有所有六种颜色.*

先把问题翻译成图论语言. 把每一种颜色和图的顶点相对应, 连接一对顶点之间的边表示工厂所生产的布的花色. 这样本题可用图论语言叙述如下:

若 6 个顶点的简单图 G 的每一个顶点的度不小于 3, 那么从图的边中可以挑选出三条端点都不相同的边.

这个结论还可更一般化, 即有下面的定理:

定理 A. *如果一个简单图 G 至少有 $2n$ 个顶点, 且每一个顶点的度不小于 n, 那么从图的边中可以挑选出 n 条端点互不相同的边.*

证明 我们将图的边一个接一个地选出来, 要求后面选出来的边和所有前面选出的边没有公共端点. 这样一直进行下去, 直到再选不出这样的边为止. 假

设我们能选出 k 条边. 如果 $k \geq n$, 那么结论就证明了. 因此不妨设 $k < n$, 且在选出了边 $P_1P_2, P_3P_4, \cdots, P_{2k-1}P_{2k}$ 之后, 在其它的边中, 每一条边至少有一个端点和点 $P_1, P_2, \cdots, P_{2k}$ 中的某一个重合. 这时顶点 P_{2k+1} 与 P_{2k+2} 均至少和 $P_1, P_2, \cdots, P_{2k}$ 中的 n 个顶点相连 (这时必有 $2k \geq n$ 成立).

现在我们来证明断言: 在被选出的边中有这样一条边, 它的一个端点和顶点 P_{2k+1} 相连, 而另一个端点和顶点 P_{2k+2} 相连. 事实上, 由于选出的边只有 k 条, 而从 P_{2k+1} 和 P_{2k+2} 发出的边总共不少于 $2n$ 条. 于是在这些 $2n$ 条以上的边中, 至少有 3 条边的端点和同一条选出的边的端点重合, 否则, 从 P_{2k+1} 和 P_{2k+2} 发出的边不得多于 $2k < 2n$ 条, 矛盾! 于是, 在所选取的边中有一条边, 它的一个端点和 P_{2k+1} 相连, 而另一个端点和 P_{2k+2} 相连.

再回转来证明定理就变得十分容易了. 这是因为若从被选出的边中去掉刚才说的这条边, 而补充两条新的边: 一条是所去掉的这条边的一个端点和 P_{2k+1} 连成的边, 另一条是所去掉的这条边的另一个端点和 P_{2k+2} 连成的边, 这时所选取的边的个数增加了 1, 且只要所选取的边的个数不等于 n, 我们就一直可以进行下去, 直到定理的结论成立为止. □

一个图 G 的一个*匹配*是由其一组没有公共端点的边构成的集合. 定理 A 说明: 若一个简单图的顶点数大于或等于 $2n$, 且最小度大于或等于 n, 则这个图有一个包含至少 n 条边的匹配.

现换一个角度来看本题中的问题. 若一个图存在包含每个顶点恰好一次的环路, 则我们把它叫做*哈密尔顿图*. 本题上面的图论版本可等价叙述为:

具有 6 个顶点且每一个顶点的度不小于 3 的简单图是哈密尔顿图.

比这个断言更一般的是著名的 Dirac 定理, 可叙述如下:

定理 B. *如果简单图 G 有 n 个 $(n \geq 3)$ 顶点, 且每一个顶点的度不小于 $\frac{n}{2}$, 那么图 G 是哈密尔顿图.*

下面介绍 Pósa (当时是一位中学生) 的巧妙证法. 他证明的是定理 B 的等价命题:

如果简单图 G 有 n 个 $(n \geq 3)$ 顶点, 并且不是哈密尔顿图, 那么 G 存在一个顶点的度小于 $\frac{n}{2}$.

证明 设 G 不是哈密尔顿图, 则 G 至少有两个顶点没有边相连 (因完全图是哈密尔顿图), 我们把这两个顶点用边连起来. 如果这条边连接以后, 所得的图仍不是哈密尔顿图, 就照此重复做下去, 因为 G 是一个有限图, 这样我们经过有限步后, 总可作出一个哈密尔顿图. 现在我们去掉最后所连的一条边, 设这条

边是 P_1P_n. 并用 G_1 表示去掉这条边后的图.

注意到图 G_1 和原来的图 G 有同样多个顶点, 而且从图 G 变到图 G_1 时, 任何一个顶点的度没有减少. 因此, 只要证明图 G_1 中可以找到一个度小于 $\frac{n}{2}$ 的顶点便可.

由图 G_1 的构造易知, 在图 G_1 中存在一条从 P_1 到 P_n 的路径经过这个图的所有顶点而且每个顶点仅经过一次. 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是将 G_1 的顶点按在这条路径出现的先后顺序的一个排列, 因此图 G_1 包含边 P_iP_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

设顶点 P_1 的度为 k, 顶点 P_n 的度为 l. 我们用 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k}$ 表示和顶点 P_1 有边相连的顶点, 其中 $i_1 = 2 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1$. 这时顶点 P_{i_j-1}, $j = 2, 3, \cdots, k$ 均不能和顶点 P_n 有边相连, 否则, 图 G_1 包含哈密尔顿环路

$$P_1P_2 \cdots P_{i_j-1}P_nP_{n-1} \cdots P_{i_j}P_1,$$

矛盾! 故顶点 P_n 至少和顶点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 中的 k 个顶点没有边相连. 因此,

$$l \leq n-1-k,$$

亦即 $l + k \leq n-1$. 故 k 和 l 中至少有一个小于 $\frac{n}{2}$. $\square$

经常有一些组合问题可转化为寻找匹配或哈密尔顿路的问题. 有兴趣者可研究 2014 年 **CMO** 的试题:

设集合 $X = \{1, 2, \cdots, 100\}$, 函数 $f: X \to X$ 同时满足:

(1) 对任意 $x \in X$, 都有 $f(x) \neq x$;

(2) 对 X 的任意一个 40 元子集 A, 都有 $A \cap f(A) \neq \varnothing$.

求最小的正整数 k, 使得对任意满足上述条件的函数 f, 都存在 X 的 k 元子集 B, 使得 $B \cup f(B) = X$.

5. 抽屉原理

题 8 (1948 年). n 个给定的正整数中存在若干个数其和能被 n 整除.

这个现在常用的漂亮结果 Erdös 把它归功于 Andrew Vazsonyi Marta Sved. 下面是他们当年写的证明 (选取 Martin Aigner 等著的《数学天书中的证明》, 中译本, 高等教育出版社, 2011):

解 置 $N = \{0, 1, \cdots, n\}$ 及 $R = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. 考虑映射 $f: N \to R$, 其中 $f(m)$ 是 $a_1 + \cdots + a_m$ 被 n 除的余数. 由 $|N| = n+1 > n = |R|$, 由抽屉原理知一定存在两个和 $a_1 + \cdots + a_k$, $a_1 + \cdots + a_l$ $(k < l)$ 有相同的余数. 以上第 1

个和可能是空的, 此时取为 0. 于是

$$\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

余数为 0. 故结论成立. □

题 9 (1927 年). 设 a 是任意的正数, $A = \{\, a,\ 2a, \cdots, (n-1)a\}$, 证明: 存在 A 中的一个元使得它和与它最近的整数之差不超过 $\frac{1}{n}$.

解 设 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\{x\} \in [0,\ 1)$. 现将区间 $[0,\ 1)$ 划分为 n 个子区间 $A_i = [\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n})$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

若存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 使得 $\{ia\} \in A_1$ 或 $\{ia\} \in A_n$, 这时 $ia \in A$ 满足要求.

下设所有 $\{a\}$, $\{2a\}, \cdots, \{(n-1)a\}$ 均不属于 A_1 和 A_n, 则它们均属于集合 $A_2,\ A_3, \cdots, A_{n-1}$. 由抽屉原理, 其中必有两个, 设为 $\{ka\}, \{ja\}$ $(1 \le k < j \le n-1)$, 落在同一个 A_i 中, 则

$$\big|\{ja\} - \{ka\}\big| \le \frac{1}{n}.$$

注意到 $(j-k)a = m + \{ja\} - \{ka\}$, 其中 m 是整数. 因此

$$\big|(j-k)a - m\big| \le \frac{1}{n}.$$

又 $(j-k)a \in A$, 故结论成立. □

点评 本题构造抽屉的方法是十分常用的. 如用类似的方法可解第 67 届普特南大学生数学竞赛中的如下试题: 对每个 n 元实数集 X, 证明: 存在 X 的一个非空子集 S 和一个整数 m 使得

$$\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \le \frac{1}{n+1}.$$

6. 费尔马数

题 10 (1940 年). 设 m, n 是两个不同的正整数. 证明:

$$2^{2^m} + 1, \quad 2^{2^n} + 1$$

不可能有大于 1 的公因子.

点评 通常把 $F_k = 2^{2^{k-1}} + 1$ 称为费尔马数. 费尔马曾猜测 F_k 都是素数, 并验证了当 $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 时, 它们确实是素数. 但欧拉证明了 F_5 是合数, 从而否定了费尔马的猜测. 但当 $k > 5$ 时是否有素的费尔马数, 还是数论中一个著名

的未解决问题.

关于本题, 我们陈述两个有趣的事实:

(1) 利用下面的恒等式 (这也是同年 Kürschák 比赛中的试题):

$$\prod_{i=0}^{k-1}(1+x^{2^i})=\sum_{i=0}^{2^k-1}x^i.$$

可给出本题的另一个证法. 事实上, 在恒等式中令 $x=2$ 且两边同时加 2 可得

$$F_1F_2\cdots F_k+2=F_{k+1}.$$

因此当 $j\le k$ 时, 数 F_j 和 F_{k+1} 的最大公约数应该是 2 的约数, 但 F_j 和 F_{k+1} 都是奇数, 所以它们的最大公约数只能等于 1. 证毕.

(2) 我们可利用本题的结论来证明: *在自然数中存在无穷多个素数*. 事实上, 任何两个具有不同下标的费尔马数没有公因数, 因此它们的标准分解式含有不同的素数. 这说明后面的费尔马数的素因子都是不同的, 因此素数有无穷多个. 证毕.

7. 圆上的近整点

题 11 (1973 年). *设 $\delta(r)$ 表示圆心在原点、半径为 r 的圆与距离它最近的整点的距离. 证明: 当 $r\to\infty$ 时, $\delta(r)\to 0$.*

先解释一下平面上点到圆的距离的定义: 通过给定点和圆心的直线与圆有两个交点, 则给定点与其中最近交点的距离叫做*该点到圆的距离*. 此外, 用 $O(r)$ 表示圆心在原点、半径为 r 的圆.

解 我们只须证明: 对任意正数 ε, 存在一个正数 R, 使得对任意 $r>R$, 都有 $\delta(r)<\varepsilon$.

现从和 y 轴平行的直线中选取那样的直线, 它和圆 $O(r)$ 有公共点, 且和 y 轴的距离取最大的整数. 如果 u 是这条直线和 y 轴之间的距离, 则

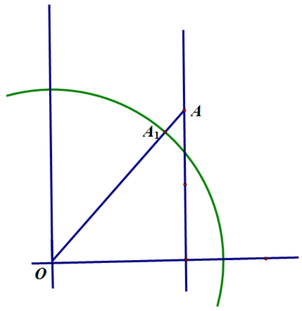
$$u\le r<u+1,$$

其中 u 是整数.

因此这条直线和圆 $O(r)$ 的交点位于以两个整点 (u,v) 和 $(u,v+1)$ 为端点的线段上, 且满足不等式:

$$u^2+v^2\le r^2<u^2+(v+1)^2,$$

其中 v 是整数.



现考虑圆外的整点 $A=(u,v+1)$, 则

$$\begin{aligned}\delta(r) &\le OA-r=\sqrt{u^2+(v+1)^2}-r\\ &=\frac{2v+1-(r^2-u^2-v^2)}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r}<\frac{2v+1}{2r}.\end{aligned}$$

注意到 $v\le\sqrt{r^2-u^2}=\sqrt{(r-u)(r+u)}<\sqrt{1\cdot(r+r)}=\sqrt{2r}$.

因此, 如果 $r>1$, 则

$$\delta(r)<\frac{2\sqrt{2r}+1}{2r}<\frac{2}{\sqrt{r}}.$$

这样, 只要取 $R=\max\{\frac{4}{\varepsilon^2},\ 1\}$, 则当 $r>R$ 时便有 $\delta(r)<\varepsilon$. □

点评 本题的一个有趣的直观的几何描述是: 一个半径充分大的圆上 (几乎) 存在整点. 此外, 由本题可推出下面数论结果:

对任意正整数 n, 存在区间 $[n,\ n+\sqrt{8}\sqrt[4]{n}]$ 上的整数, 它可以表示成两个整数的平方和.

事实上, 仿照本题上面的证法, 取圆的半径 r 等于 $\sqrt{n}$ (即取 $r^2=n$). 设 $m=u^2+(v+1)^2$ 是与 n 最接近的可表示成两个整数的平方和形式的整数, 则

$$m-n=u^2+(v+1)^2-r^2<2v+1,$$

又因 $m-n$ 是整数, 所以

$$m-n\le 2v<2\sqrt{2r}=\sqrt{8}\sqrt[4]{n}.$$

故在 n 和 $n+\sqrt{8}\sqrt[4]{n}$ 之间总包含满足要求的整数. 证毕.

8. 差集

题 12 (1966 年). *设 A 是一个整数集, 其中既包含正整数, 也包含有负整数, 且对任意 $a,b\in A$, 有 $2a\in A$ 和 $a+b\in A$. 证明: $A-A\subseteq A$.*

这是一个小巧而有趣的组合问题.

解 先注意到一个简单的事实: 若 $c\in A$, 则对任意正整数 n 有 nc 属于 A.

事实上, 注意到 $2c \in A$ 及 $(n+1)c = nc + c$, 对 n 用归纳法便知结论成立.

设 a 是集合 A 中的最小正整数, b 是 A 中绝对值最小的负整数, 则 $a+b \in A$ 且 $b < a+b < a$. 但 A 中不可能含有小于 a 的正数和大于 b 的负数. 因此, $a+b=0$. 亦即有 $b=-a$. 又由上述已证结论知对所有的正整数 n, na, nb 均属于 A, 故对任意整数 m, ma 均属于 A.

下面我们进一步证明: 除了 a 的整数倍以外, A 不包含其它元素. 若不然, 设 $x \in A$, 且 $qa < x < (q+1)a$, 其中 q 是整数. 又 x 可写成下面的形式

$$x = qa + r \quad (0 < r < a).$$

因此

$$r = x + (-q)a \in A.$$

这与 a 的最小性矛盾!

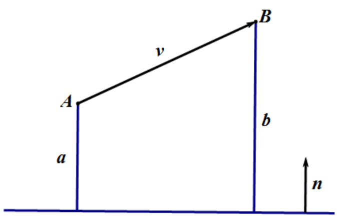
综合上面的结论知 $A = \{ma \mid m \in \mathbf{Z}\}$, 故 $A - A \subseteq A$. □

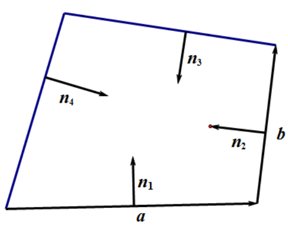
9. 平行四边形的特征

题 13 (1967 年). 证明: 若凸四边形 $ABCD$ 的任意一个顶点到不通过它的两边的距离之和均相等, 则 $ABCD$ 是平行四边形.

下面介绍一个简洁的向量的做法.

解 显然, 条件"任意一个顶点到不通过它的两边的距离之和均相等"换为"任意一个顶点到四边的距离之和均相等", 问题是完全等价的.





设 $\mathbf{n}$ 是一条直线 l 的单位法矢量, 方向指向以 l 为边界的半平面 (如上图), A 和 B 是属于半平面的点, a 和 b 分别是点 A 和 B 到直线 l 的距离, 则 $b-a$ 可表示成数量积

$$b - a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \tag{$*$}$$

设 $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, $\mathbf{n_4}$ 是四边形 $ABCD$ 各边的单位法矢量 (所有的法矢量指向四边形内部), 如上图, 而 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是四边形的两个相邻的边矢量. 由条件知, 矢量

$\mathbf{a}$ 的始点与终点到四边形各边的距离之差的和等于 0. 应用 $(*)$, 这可写成下面的形式

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_1}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_2}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_3}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{n_4}=0,$$

亦即

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}+\mathbf{n_4})=0.$$

同理

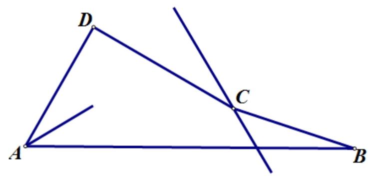
$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}+\mathbf{n_4})=0.$$

这说明矢量 $\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}+\mathbf{n_4}$ 和两个不平行的矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都垂直, 因此

$$\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}+\mathbf{n_3}+\mathbf{n_4}=\mathbf{0}.$$

这意味着把矢量 $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, $\mathbf{n_4}$ 平移到首尾相接时, 我们得到了一个封闭的四边形. 因为它的所有边的长都等于 1, 因此所得到的四边形是菱形, 于是它的对边平行. 再注意到四边形 $ABCD$ 的边和矢量 $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, $\mathbf{n_4}$ 对应垂直, 所以也是一个平行四边形. □

点评 可以证明, 本题中的凸性要求是多余的, 因为对于非凸的四边形, 题中的条件是不可能实现的. 事实上, 假设四边形 $ABCD$ 其顶角 $\angle C$ 大于平角. 过点 C 作一直线和 $\angle DAB$ 的平分线垂直. 因为 $\angle DCB$ 是非凸的, 所以这条直线至少将四边形的一个顶点 (例如顶点 B, 如下图) 和顶点 A 分离开来.



这时

$$(C,\ \angle DAB)<(B,\ \angle DAB) \tag{$*$}$$

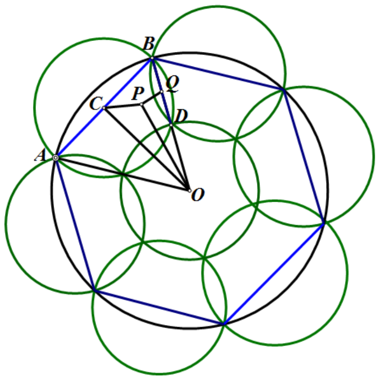
其中 $(C,\ \angle DAB)$ 表示 C 到 $\angle DAB$ 的两边的距离之和. 又注意到 $(*)$ 的右边等于 B 到边 AD 的距离, 它小于点 B 到边 AD, CD 的距离, 故顶点 B, C 不满足条件.

本题一个有趣的等价描述是 2003 年西部竞赛的试题: 证明: 若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到四条边 AB, BC, CD, DA 的距离之和为定值, 则 $ABCD$ 是平行四边形.

10. 覆盖

题 14 (1947 年). 问一个半径为 r 的大圆盘最少要用多少个半径为 $\frac{r}{2}$ 的小圆盘才能将其盖住?

解 答案是 7 个. 将 7 个小圆盘作如下分布: 把 6 个小圆盘的圆心和大圆盘的内接正六边形的边的中点重合, 第 7 个小圆盘的圆心和大圆盘的圆心重合.



下面证明这样放置的 7 个小圆盘确实盖住了大圆盘. 事实上, 设 AB 是大圆的内接正六边形的一条边, C 是它的中点. 显然, 只需研究大圆的一部分, 即在 $\angle BOC$ 内且在以 O 为圆心, $\frac{r}{2}$ 为半径的圆外的那一部分.

这样, 我们需要证明: 如果点 P 在 $\angle BOC$ 内或边界上, 且 $\frac{r}{2} < OP \leq r$, 那么 $CP \leq \frac{r}{2}$. 现在半径 OB 上取线段 $OQ = OP$, 这时点 Q 落在线段 BD 上, 其中 D 是半径 OB 的中点. 现考察 $\triangle COP$ 和 $\triangle COQ$, 它们的两组边对应相等, 且它们的夹角满足: $\angle COP \leq \angle COQ$, 所以 $CP \leq CQ$. 这样, 只要证明: $CQ \leq \frac{r}{2}$ 就行了. 而注意到 $\triangle BCD$ 是边长等于 $\frac{r}{2}$ 的等边三角形, 便知要证不等式显然成立.

当然还需证明用少于 7 个小圆盘, 不能盖住大圆. 这只要注意到半径为 $\frac{r}{2}$ 的小圆中两点之间的最大距离为 r, 而大圆弧长为圆周长 $\frac{1}{6}$ 的两点之间的直线距离正好等于 r, 所以一个小圆只能盖住大圆周不超过整个圆周长的 $\frac{1}{6}$ 的一部分. 因此, 为了盖住大圆的圆周, 至少必须用 6 个小圆. 但这 6 个小圆不能盖住大圆的圆心, 因若某个小圆盖住了圆心, 那么这个小圆最多和大圆的圆周有一个公共点. 这说明用 6 个小圆是不能盖住大圆的. □

题 15 (1974 年). 给定边长为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 的正方形的无穷序列. 证明: 存在这样一个正方形, 可以把序列中所有的正方形互不重叠地放在它的内部, 并求能将序列中所有正方形容纳下的最小正方形的边长.

解 先叙述一个引理:

引理 包含给定正方形的所有直角三角形中, 以直角顶点和正方形的一个顶点重合, 且斜边上的中线与正方形的对角线重合的直角三角形的面积最小, 最小值等于给定正方形面积的两倍.

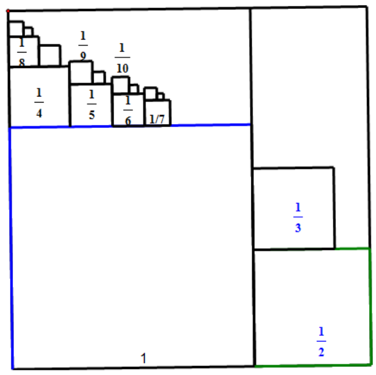
该引理可用几何方法直接证明, 也可看作一个著名结论: "任何三角形的内含平行四边形的面积不超过该三角形面积的一半" 的推论 (注意它的反问题: "任何平行四边形的内含三角形的面积不超过该平行四边形面积的一半", 也是一个经典结论, 且是 Kürschák 竞赛 1918 年的试题).

回到原题. 我们将证明步骤分成两步:

(a) 证明边长为 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 的所有正方形可以互不重叠地放在边长为 $\frac{3}{2}$ 的正方形内;

(b) 不能把边长为 1 和 $\frac{1}{2}$ 的正方形互不重叠放进边长比 $\frac{3}{2}$ 更小的正方形内.

先证 **(a):** 在边长为 1 的正方形的旁边放边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形, 在它们所构成的角落上放边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形 (如下图).



因为

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<1,$$

我们能在单位正方形上面放边长为 $\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7}$ 的正方形. 又因

$$\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}<\frac{1}{k},$$

我们能在边长为 $\frac{1}{k}$ $(k=4,\ 5,\ 6,\ 7)$ 的正方形上面并排放边长为 $\frac{1}{2k}$ 和 $\frac{1}{2k+1}$ 的正方形. 因而放好了边长为 $\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{15}$ 的正方形. 如此下去, 下一排放的是边长为 $\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{31}$ 的正方形, 等等.

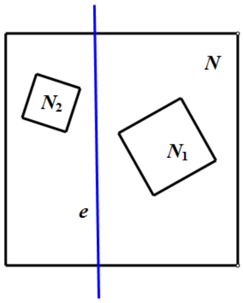
注意到

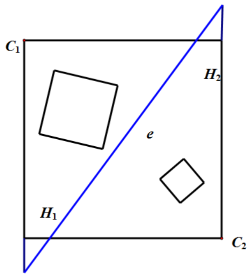
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\cdots=\frac{2}{k}<\frac{1}{2},$$

故放在单位正方形上面的正方形的 "高" 之和不超过 $\frac{1}{2}$.

故以给定的无穷序列为边长的所有正方形可以互不重叠地放在边长为 $\frac{3}{2}$ 的正方形内.

再证 **(b):** 设把边长为 1 的正方形 N_1 和边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形 N_2 放在某一个正方形 N 内使 N_1 和 N_2 没有公共内点. 这时存在一直线 e 分离 N_1 和 N_2. 下分两种情况:





1) 若直线 e 平行于正方形 N 的一条边, 这时易见 N 不小于 N_1 和 N_2 的边长之和, 结论成立.

2) 若直线 e 不平行于正方形 N 的边, 即和 N 的边或它的延长线相交. 这时从 N 的两个顶点 C_1 和 C_2 沿着 N 的边发出的射线和 e 交成两个直角三角形 H_1 和 H_2 (如上图), 它们分别包含了正方形 N_1 和 N_2. 现在应用引理知正方形 N_1 和 N_2 的对角线均与分别包含它们的最小直角三角形 H_1 和 H_2 的斜边上的中线重合, 其和等于正方形 N 的对角线 C_1C_2, 这说明要包含 N_1 和 N_2, 正方形 N 的对角线的长至少要等于 N_1 和 N_2 的对角线长之和, 从而它的边长至少也要等于 N_1 和 N_2 的边长之和, 因此结论成立.

由 **(a)** 和 **(b)** 立得满足要求的最小正方形的边长等于 $\frac{3}{2}$. □

11. 多项式不等式

题 16 (1974 年). 证明: 对所有的整数 $k \geq 1$ 和实数 x, 有不等式

$$P_{2k}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} > 0.$$

解 1 注意到一个明显的事实: 当 $x \leq 0$ 时, $P_{2k}(x) \geq 0$. 因此我们仅需证明: 当 $x \geq 0$ 时, 也有 $P_{2k}(x) \geq 0$. 这样, 我们可转而证明:

$$P_{2k}(x)P_{2k}(-x) > 0, \ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

下面计算乘积 $P_{2k}(x)P_{2k}(-x)$ 中 x^j 的系数, 分两种情况:

1) 当 $1 \leq j \leq 2k$ 时, x^j 的系数等于

$$1 \cdot \frac{1}{j!} - 1 \cdot \frac{1}{(j-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(j-2)!} + \cdots + (-1)^j \frac{1}{j!} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i \mathrm{C}_j^i = 0;$$

2) 当 $2k+1 \le j \le 4k$ 时, x^j 的系数等于

$$(-1)^{j-2k}\frac{1}{(j-2k)!}\cdot\frac{1}{(2k)!}+(-1)^{j-2k+1}\frac{1}{(j-2k+1)!}\cdot\frac{1}{(2k-1)!}$$
$$+\cdots+(-1)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{(j-2k)!}$$
$$=\frac{1}{j!}\sum_{i=j-2k}^{2k}(-1)^i\mathrm{C}_j^i$$

注意到上面组合和式中与两端等远的项其绝对值相等. 因此, 又有两种情况:

a) 当 j 是区间 $[2k+1,4k]$ 上的奇数时,

$$\sum_{i=j-2k}^{2k}(-1)^i\mathrm{C}_j^i = 0.$$

这时 x^j 的系数等于 0.

b) 当 j 是区间 $[2k+1,4k]$ 上的偶数时, 注意到下面两个常用的组合恒等式:

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\mathrm{C}_j^i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\mathrm{C}_j^i = (-1)^m\mathrm{C}_{j-1}^m,$$

我们有

$$\sum_{i=j-2k}^{2k}(-1)^i\mathrm{C}_j^i = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\mathrm{C}_j^i - 2\sum_{i=0}^{j-2k-1}(-1)^i\mathrm{C}_j^i = 2\mathrm{C}_{j-1}^{j-2k-1}.$$

这时 x^j 的系数等于

$$2\frac{1}{j!}\cdot\mathrm{C}_{j-1}^{j-2k-1} = \frac{2}{j}\cdot\frac{1}{(2k)!\,(j-2k-1)!}.$$

综上, 我们有

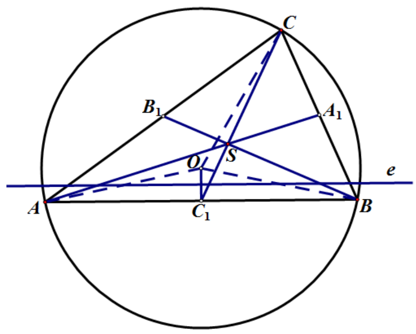
$$P_{2k}(x)P_{2k}(-x) = 1+\frac{x^{2k+2}}{(2k)!\,(k+1)}+\frac{x^{2k+4}}{(2k)!\,3!\,(k+2)}+\cdots+\frac{x^{4k}}{(2k)!^2} > 0.$$

□

解 2 因 $x<0$ 时结论显然成立, 我们仅须考虑 $x \ge 0$ 的情况.

1) 当 $x \ge 2k$ 时, P_{2k} 的项可以组合重写为

$$P_{2k}(x) = 1+\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{2i-1}}{(2i)!}(x-2i) \ge 1.$$



2) 当 $0 \le x \le 2k$ 时, 则 P_{2k} 是闭区间 $[0,\ 2k]$ 上的连续函数, 从而在该区间上必有最小值. 若在区间端点 0 或 $2k$ 处取到最小值, 结论显然成立. 下考虑 P_{2k} 在区间 $[0,\ 2k]$ 的某一个内点 x_0 处取得最小值, 这时在点 x_0 的某个邻域中的任何异于 x_0 的 x 有 $P_{2k}(x) > P_{2k}(x_0)$, 从而 $P'_{2k}(x_0) = 0$, 即

$$0 = P'_{2k}(x_0) = \sum_{i=1}^{2k}(-1)^i \frac{x_0^{i-1}}{(i-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0),$$

因此

$$P_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0.$$

这说明 $P_{2k}(x)$ 在 $[0, 2k]$ 上的最小值大于 0, 故 $P_{2k}(x)$ 在 $[0, 2k]$ 上恒大于 0. □

点评 本题是一个有较高难度的分析不等式. 上面解 1 的巧妙之处在于将问题转化为研究 $P_{2k}(x)$ 和 $P_{2k}(-x)$ 的 "耦" $P_{2k}(x)P_{2k}(-x)$ 的非负性. 而解法 2 的妙处在于发现了 $P'_{2k}(x_0)$ 和 $P_{2k}(x_0)$ 的关系

$$P'_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0),$$

居然把最小值求出来了!

12. 中线不等式问题 —— 一个研究范例

题 17 (1963 年). 证明: 如果三角形不是钝角三角形, 那么它的中线和不小于外接圆半径的四倍.

解 如果 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形, 那么它的外心 O 属于 $\triangle SAB$, $\triangle SBC$, $\triangle SCA$ 中的一个, 其中 S 是 $\triangle ABC$ 的重心. 不妨设 O 属于 $\triangle SAB$. 如下图所示:

因为 $\triangle SAB$ 包含 $\triangle OAB$, 所以

$$SA + SB \ge OA + OB,$$

而且等号仅当点 O 和点 S 重合时成立. 亦即

$$m_a + m_b \geq 3R. \tag{1}$$

此外, 如果点 O 和点 C_1 重合, 则有 $CO = CC_1$. 否则作线段 OC_1 的中垂线 e, 则 e 分离 AB 和顶点 C. 因此

$$m_c = CC_1 \geq CO = R, \tag{2}$$

而且等号仅当点 O 和点 C_1 重合时成立.

将 (1) 和 (2) 相加得

$$m_a + m_b + m_c \geq 4R. \tag{3}$$

但上面等号是不可能取到的, 因为外心不可能同时和两个不同的点 S 以及 C_1 都重合, 所以 (3) 式为严格不等式. □

本题可从下面不同的角度进行研究:

(1) 条件是否必要, 即非钝角三角形的条件是否可以去掉?

(2) 不等式的最优性讨论, 即系数 4 是最优的吗?

(3) 反向不等式研究, 即是否可用三角形的外径和给出其中线和的上界估计?

(4) 此结果是否可推广到空间中去?

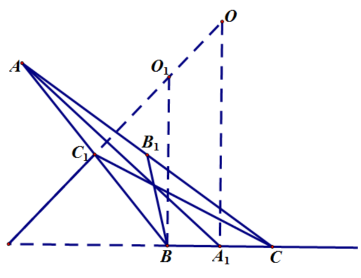
下面逐一回答这些问题:

(1) 非钝角三角形的条件不能去掉.

下面说明存在钝角三角形 $\triangle ABC$ 使得

$$m_a + m_b + m_c < 4R.$$

对任给的钝角 $\angle ABC > 90^\circ$, 取定 A 点并记 $AB = c$. 假设 O_1 是过 AB 的中点 C_1 且与 AB 垂直的直线和过点 B 且与 BC 垂直的直线的交点.



在 BC 上选取一点 C, 使线段 $BC = a$ 满足不等式

$$a + c < 2 \cdot BO_1, \tag{1.1}$$

这样我们就构造出了一个钝角三角形 $\triangle ABC$. 设 R 是这个三角形的外接圆半径, O 为其外心, 则

$$R = BO > A_1O > BO_1, \tag{1.2}$$

其中 A_1 为 BC 的中点. 上面不等式的最后一个不等式用了 $\angle ABC$ 为钝角的条件. 又注意到在 $\triangle ABA_1$, $\triangle BC_1B_1$, $\triangle CBC_1$ 中分别有

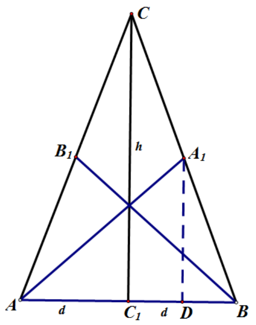
$$m_a < \frac{a}{2} + c,\ \ m_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2},\ \ m_c < a + \frac{c}{2},$$

将它们相加并利用 (1.1) 和 (1.2) 可得

$$m_a + m_b + m_c < 2(a+c) < 4BO_1 < 4R.$$

□

(2) 4 是使得这个不等式成立的最优常数.



设 $2d$ 是一个等腰 $\triangle ABC$ 的底边 AB 的长, h 是底边上的高. 并设 AA_1 是 $\triangle ABC$ 的中线, D 是由 A_1 向 AB 所作垂线的垂足. 在 $\triangle AA_1D$ 中易知

$$m_a = m_b < \frac{h}{2} + \frac{3}{2}d,$$

又注意到 $m_c = h$, 因此

$$m_a + m_b + m_c < 2h + 3d. \tag{2.1}$$

又在 $\triangle ABC$ 中显然有

$$2R > h. \tag{2.2}$$

这样由 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$m_a + m_b + m_c < \left(4 + 6\frac{d}{h}\right)R. \tag{2.3}$$

假设 $\lambda = 4 + \varepsilon$ (其中 ε 是大于 0 的某个整数), 将高 h 固定, 并选取 d 使得

$$d < \min\left\{h, \frac{\varepsilon h}{6}\right\},$$

这时 $\triangle ABC$ 仍为锐角三角形且有

$$4+6\frac{d}{h}<\lambda. \tag{2.4}$$

这时由 (2.3) 和 (2.4) 知

$$m_a+m_b+m_c<\lambda R.$$

这说明比 4 大的常数 λ, 总可以找到一个锐角三角形, 原结论不再成立, 因此 4 是最优的常数. □

(3) 对任意 $\triangle ABC$ 有上界估计:

$$m_a+m_b+m_c \leq 4.5R.$$

事实上, 设 P 是 $\triangle ABC$ 的平面上的任意一点, S、O 分别是 $\triangle ABC$ 的重心和外心. 并记 $a(P)=\frac{PA+PB+PC}{3}$, $q(P)=\sqrt{\frac{PA^2+PB^2+PC^2}{3}}$, 则 $a(P)\leq q(P)$.

现引进向量

$$\overrightarrow{SA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{SB}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{SC}=\mathbf{c},\ \overrightarrow{SP}=\mathbf{p},$$

注意到 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned}
3q^2(S)&=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2,\\
q^2(P)&=\frac{1}{3}\left[(\mathbf{a}-\mathbf{p})^{\mathbf{2}}+(\mathbf{b}-\mathbf{p})^{\mathbf{2}}+(\mathbf{c}-\mathbf{p})^{\mathbf{2}}\right]\\
&=\frac{1}{3}\left(\mathbf{a^2}+\mathbf{b^2}+\mathbf{c^2}\right)-\frac{2}{3}\mathbf{p}\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\right)+\mathbf{p^2}\\
&=q^2(S)+\mathbf{p^2}\geq q^2(S).
\end{aligned}$$

因此有

$$m_a+m_b+m_c=\frac{9}{2}a(S)\leq\frac{9}{2}q(S)\leq\frac{9}{2}q(O)=\frac{9}{2}R.$$

□

(4) 包含外心的四面体的中线之和大于其外接球半径的 4 倍, 且系数 4 是最优的.

这里我们不加证明地叙述结果.

上面几何不等式的研究是初等数学研究的一个范例, 值得我们仔细体会.