# 第十九期问题征解解答与点评

牟晓生

**第一题**. 给定正整数 $n \geq 4$, 设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i|x_i - x_{i+1}|$ 的最大值, 约定 $x_{n+1} = x_1$.

(湖南雅礼中学学生 汤继尧 供题)

**证明** (根据供题者的解答整理):

我们将证明当 $n$ 为偶数时, 最大值为 $\frac{n}{2}$; 而当 $n$ 为奇数时, 最大值为 $\frac{n}{2} - \frac{1}{4}$. 不难给出取到最大值的例子:

当 $n$ 为偶数时, 令 $x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = 1$, 而 $x_2 = x_4 = \cdots = x_n = 0$;

当 $n$ 为奇数时, 令 $x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-2} = 1$, $x_2 = x_4 = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = \frac{1}{2}$.

下面证明和式不可能更大. 我们对 $n$ 用归纳法, 以 $n = 2$ 为归纳基础.

$n = 2$ 时要证 $(x_1 + x_2)|x_1 - x_2| \leq 1$, 显然成立.

假设命题在 $n-1$ 时成立, 考虑 $n$ 的情况.

如果存在 $i$ 使得 $x_i \geq x_{i+1} \geq x_{i+2}$, 则

$$\begin{aligned} x_i|x_i - x_{i+1}| + x_{i+1}|x_{i+1} - x_{i+2}| &\leq x_i\left(|x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - x_{i+2}|\right) \\ &= x_i|x_i - x_{i+2}|. \end{aligned}$$

此时去掉 $x_{i+1}$ 后应用归纳假设即可.

类似地, 如果 $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2}$, 则

$$x_i|x_i - x_{i+1}| + x_{i+1}|x_{i+1} - x_{i+2}| \leq x_i|x_i - x_{i+2}| + \frac{1}{4}.$$

应用归纳假设同样可得命题.

如果 $n$ 是奇数, 那么必定存在 $i$ 使得 $x_i \geq x_{i+1} \geq x_{i+2}$ 或者 $x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2}$. 这样我们就做完了. 因此只剩下 $n$ 是偶数且 $x_{2i} \leq x_{2i-1}, x_{2i+1}, \forall i$ 的情况. 此时

$$\sum_{i=1}^{n} x_i|x_i - x_{i+1}| = x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_3 - x_2) + x_3(x_3 - x_4) + \cdots + x_n(x_1 - x_n).$$

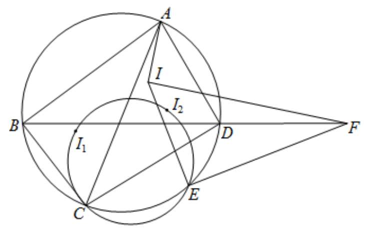
等号右边是关于 $x_1$ 的二次式, 且首项系数为 1, 因此其最大值在 $x_1=1$ 或者 $x_1=x_2$ 或者 $x_1=x_n$ 时取到. 后两种情况均可划归为之前的讨论, 所以不妨假设 $x_1=1$. 同样地, 我们可以假设 $x_3=x_5=\cdots=x_{n-1}=1$. 故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i|x_i-x_{i+1}|=\frac{n}{2}-x_2^2-x_4^2-\cdots-x_n^2\leq\frac{n}{2}.$$

命题得证! $\square$

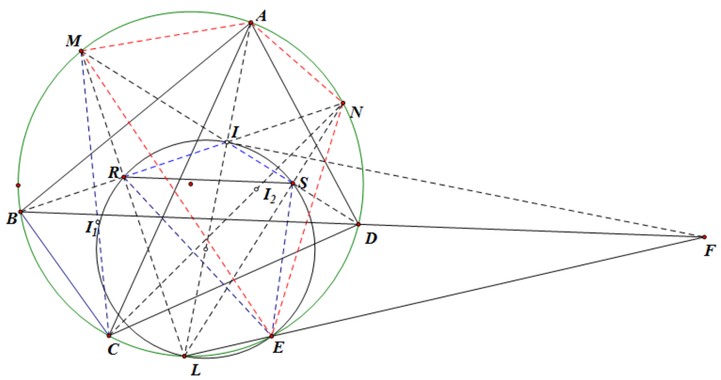
**评注** 长沙市长郡中学彭永坚同学也给出了本题的正确解答.

**第二题**. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 $\Gamma$. $I,I_1,I_2$ 分别是 $\triangle ABD,\triangle ABC,\triangle ADC$ 的内心. 过 $C,I_1,I_2$ 的圆与圆 $\Gamma$ 交于除 $C$ 外的另一点 $E$, 过 $E$ 作 $EI$ 的垂线交直线 $BD$ 于 $F$. 证明: $IF\perp AI$.




(湖南师大附中 苏林 供题)

**证明** (**根据成都石室中学卢禹杰同学的解答整理**):




设 $AI,BI,CI$ 与圆 $\Gamma$ 交于 $L,M,N$. $ML\cap BN=R,NL\cap DM=S$.

通过角度易知 $\triangle EI_1M\sim\triangle EI_2N$. 故 $\frac{ME}{NE}=\frac{MI_1}{NI_2}=\frac{MA}{NA}$.

又 $\frac{MA}{NA}=\frac{MI}{NI}=\frac{MR}{NS}$, 所以 $\frac{ME}{NE}=\frac{MR}{NS}$. 导出 $\triangle ERM\sim\triangle ESN$.

从而 $\angle LRE=\angle LSE$, 故 $E,L,R,S$ 共圆, 并且这个圆经过点 $I$.

于是 $\triangle IEL=\frac{\pi}{2}$, 推出 $F$ 在 $LE$ 的延长线上.

接下来注意到圆 $\Gamma$ 与圆 $ELRIS$ 交于 $L,E$, 圆 $\Gamma$ 与圆 $BID$ 交于 $B,D$, 因此 $F$ 作为 $LE$ 与 $BD$ 的交点一定是三个圆的根心. 而圆 $ELRIS$ 与圆 $BID$ (后者圆心为 $L$ )相切于点 $I$, 所以 $IF\perp AI$. $\square$

**评注** 乐清寄宿中学黄硕董, 如东高级中学张陈成, 象山县第三中学黄子宸,

东北育才学校何雨桐, 长沙市长郡中学曾科荣、彭永坚以及杭州二中包恺成、刘浩宇等同学也给出了本题的正确解答.

**第三题**. 考虑数列 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$, $\forall n \geq 1$. 证明这个数列中只有前三项是整数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

**证明** (根据杭州二中刘浩宇同学的解答整理):

我们用归纳法证明当 $n \geq 4$ 时有

$$\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} < x_n < \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}.$$

由于 $x_4 = \frac{5}{2}$, 归纳假设成立.

假设结论对 $n$ 成立, 那么在 $n+1$ 时,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n} > 1 + \frac{2n}{1+\sqrt{4n+1}} = \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}.$$

这就是我们所寻求的下界. 另一方面我们有

$$x_{n+1} < 1 + \frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}}.$$

因此只要证明 $\frac{2n}{1+\sqrt{4n-3}} < \frac{\sqrt{4n+5}-1}{2}$.

令 $t = \sqrt{4k-3}$, 则只要证 $t^2 + t + 4 < (t+1)\sqrt{t^2+8}$. 平方展开后等价于 $t > 1$, 即 $k > 1$, 显然成立. 于是上面的结论成立.

这样我们有 $n - \frac{3}{4} < (x_n - \frac{1}{2})^2 < n + \frac{1}{4}$, 即 $n - 1 < x_n^2 - x_n < n$. 因此 $x_n$ 在 $n \geq 4$ 时不可能是整数. $\square$

**评注 (1).** 如东高级中学张陈成以及长沙市长郡中学曾科荣、彭永坚等同学也给出了本题的正确解答.

**(2).** 这道题看似是数论题, 但上面的解答却几乎只用了代数. 那么是否有偏数论一些的解答呢? 答案是肯定的. 首先令 $x_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, 则有递推式

$$a_{n+1} = a_n + n a_{n-1}, a_0 = a_1 = 1.$$

考虑指数型母函数 $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$. 则由这个递推式得到 $f'(x) = (1+x)f(x)$. 结合 $f(0) = 1$ 得到 $f(x) = \exp\{x + \frac{x^2}{2}\}$. 展开后得到

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k)!!.$$

我们来证明 $a_n$ 与 $a_{n+1}$ 的最大公约数只能是 2 的幂次.

事实上, 假设奇素数 $p \mid a_n, a_{n+1}$ 且 $p \nmid a_{n-1}$, 则由递推公式知 $p \mid n$. 然而在上面 $a_n$ 的直接表达式中若 $p \mid n$, 则 $\binom{n}{2k}$ 在 $p \nmid k$ 时是 $p$ 的倍数, 而 $(2k)!!$ 在 $p \mid k$ 且 $k > 0$ 时是 $p$ 的倍数. 因此当 $p \mid n$ 时 $a_n \equiv 1 \pmod p$, 导出矛盾!

接下来我们注意到由归纳法, $a_n$ 与 $a_{n+1}$ 的最大公约数整除 $n!$. 由于这个最大公约数是 2 的幂次, 即得 $(a_n, a_{n+1}) \mid 2^{n-1}, \forall n \geq 1$. 然而 $a_n \geq (2\lfloor n/2 \rfloor)!!$ 远远比 $2^{n-1}$ 大, 这样我们就证明了对较大的 $n$, $a_n \nmid a_{n+1}$, 即 $x_{n+1}$ 不是整数.

事实上我们证明了强得多的结论, 即 $x_{n+1}$ 的最简分母 $\frac{a_n}{(a_n, a_{n+1})}$ 随着 $n$ 趋于无穷, 且其增长速度比指数还快. 这些更强的结论是无法用原来巧妙的代数估计得出的.

**第四题**. 令 $F(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ 为 $1 \sim n$ 中能被某个 $a_i$ 整除或能整除某个 $a_i$ 的数的个数. 证明若 $1 < a_1, \ldots, a_k \leq n$, 则

$$F(n; a_1, \ldots, a_k) \leq F(n; p_1, \ldots, p_k),$$

其中 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 是前 $k$ 个素数.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

**证明** (根据供题者的解答整理):

令 $M(n; a_1, \ldots, a_k)$ 表示 $1 \sim n$ 中能被某个 $a_i$ 整除或能整除某个 $a_i$ 的数的集合. 我们取 $1 < a_1, \ldots, a_k \leq n$ 使得 $|M|$ 最大, 且在 $|M|$ 相等的情况下使得 $a_1 \cdots a_k$ 的素因子个数(计重数)最小. 我们将证明在这种情况下每个 $a_i$ 都是素数. 显然, 我们可以假设 $a_1, \ldots, a_k$ 互不相等. 先证明以下事实:

1. 假设 $a_i = p^\alpha$, $p$ 是素数, 则 $\alpha = 1$. 这是因为可以将 $a_i$ 调整为 $p$, 使得 $M$ 中元素不减, 且总的素因子个数变少.

2. 假设 $a_i = p$ 为素数, 则 $p \nmid a_j, \forall j \neq i$. 事实上, 如果 $a_j = p^\alpha a_j', \alpha > 0, p \nmid a_j'$. 那么首先由上一步知道 $a_j' > 1$. 此时把 $a_j$ 调整为 $a_j'$ 可以保证原来 $M$ 中的元素仍在 $M$ 中, 与最优性矛盾 (如果 $x \mid a_j, x \nmid a_j'$, 则 $d$ 是 $p$ 的倍数. 此时 $a_i | x \implies x \in M$).

3. 假设 $a_i = p^\alpha d, \alpha \geq 1, d > 1, p \nmid d$, 则 $d \nmid a_j, \forall j \neq i$. 否则设 $d \mid a_j$, 则可将 $a_i$ 调整为 $p$ 而保证 $M$ 中元素不减.

现在设 $a_1, \ldots, a_r$ 为合数, $a_{r+1}, \ldots, a_k$ 为素数. 由上面的第二点, 我们知道 $(a_\mu, a_\nu) = 1, \forall \mu \leq r < \nu$. 取不同素数 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 使得: ① $q_1$ 是 $a_1 \cdots a_r$ 的

最小素因子; ② 每个 $a_i$ 均被某个 $q_j$ 整除; ③ $q_v = a_v, \forall r < \nu$.

我们只要证明:

$$|M'| = |M(n; q_1, \ldots, q_k)| \geq |M(n; a_1, \ldots, a_k)| = |M|.$$

对 $\nu = 1, \cdots, k$, 令 $m_\nu$ 为 $a_\nu$ 的约数中与 $q_1 \cdots q_k$ 互素的最大的那个. 例如在 $\nu > r$ 时 $m_\nu$ 必然为 1. 注意到每个在 $M$ 中且不在 $M'$ 中的数必定是某个 $a_\nu$ 的因子, 且不被任何 $q_j$ 整除, 因此

$$M - M' \subset \{d > 1 : \exists \nu \leq r, d \mid m_\nu\}.$$

接下来, 我们将对每个这样的 $d$ 构造一个在 $M'$ 中且不在 $M$ 中的数. 只要这些数互不相同就证明了 $|M'| \geq |M|$.

首先考虑 $d \mid m_\nu$ 且 $1 < d < m_\nu$. 令 $\alpha$ 为最大的正整数使得 $A(d) = q_1^\alpha d \leq n$. 由于 $q_1 d \leq m_\nu \leq n$, $\alpha$ 是存在的, 并且显然有 $A(d) \in M'$. 让我们证明 $A(d) \notin M$. 事实上, 如果 $A(d) \mid a_j$ 则 $A(d) = a_j$, 否则 $j \leq r$ 而 $\alpha$ 可以更大. 所以假设 $a_j \mid A(d)$, 即 $a_j = q_1^\beta d_1$, 其中 $d_1 \mid d \mid a_\nu$. 由上面证明的第三点, 要么 $d_1 = 1$, 要么 $\beta = 0$. 前者导致 $a_j = q_1^\beta = q_1$, 与假设 $a_1 \sim a_r$ 为合数矛盾. 后者导致 $a_j = d_1 | m_\nu$, 与假设 $a_j$ 被某个 $q_\mu$ 整除而 $m_\nu$ 与每个 $q_\mu$ 互素矛盾. 这样我们就验证了 $A(d) = q_1^\alpha d \in M' - M$.

其次考虑 $d = m_\nu > 1$, 故 $\nu \leq r$. 设 $S$ 为这样的 $\nu$ 的个数. 对 $1 \leq i \leq r$, 令 $\gamma_i$ 为最大的整数使得 $A_i = q_1^{\gamma_i} q_i \leq n$. 显然, 这 $r$ 个 $A_i$ 互不相同, 且均不同于上面定义的 $A(d)$. 它们都属于 $M'$, 而我们将要证明它们中至多有 $r - S$ 个属于 $M$. 事实上, 如果 $A_i | a_j$ 则 $A_i = a_j$. 所以我们只需考虑 $a_j | A_i, j \leq r$ 的情况. 这时由于 $m_j | a_j$ 而 $m_j$ 与 $q_1 \cdots q_k$ 互素, 我们知道 $m_j = 1$. 这样的不同的 $j$ 恰有 $r - S$ 个, 所以只要证明同一个 $a_j$ 不能整除两个 $A_i$ 就行了. 由 $A_i$ 的定义, 那样会导致 $a_j$ 为 $q_1$ 的幂, 故而 $a_j = q_1$, 与假设 $a_j$ 为合数矛盾.

因此, $r$ 个 $A_i$ 中至少有 $S$ 个属于 $M' - M$, 故我们证明了 $|M' - M| \geq |M - M'|$ 也即 $|M'| \geq |M|$. 于是我们也就证明了最初的论断: 当 $|M|$ 最大且 $a_1 \cdots a_k$ 的素因子个数最少时每个 $a_i$ 都是素数. 显然, 在这种情况下 $|M|$ 的最大值在 $a_i = p_i$ 时取到, 所以命题得证! $\square$

**评注** 这是 Erdös 在 1949 年向美国数学月刊提供的问题, 而以上漂亮的解答由 George Szekeres 给出. 值得一提的是, George Szekeres 和他的夫人 Esther Klein 证明了平面上一般位置的五个点中必有四个点构成凸四边形, 并且将结

论推广为足够多的点中必有凸 $n$ 边形, 开启了欧式拉姆塞问题的研究. 由于这个问题促成了 Szekeres 和 Klein 的婚姻, Erdös 将其称为“The Happy Ending Problem”.