

数学新星问题征解

第二十二期 (2017.06)

主持: 牟晓生

第一题. 设 $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2), (R_1, R_2), (S_1, S_2)$ 为 $\triangle ABC$ 的四对等角共轭点, 满足有向线段 $P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2, S_1S_2$ 平行且相等. 证明: P_1 是 $\triangle Q_1R_1S_1$ 的垂心.

(台湾 Telv Cohl 供题)

第二题. 设 B 为如下复数集合: $B = \{z = x + yi : |x|, |y| \leq 1\}$. 已知 $z_1 \sim z_6 \in B$ 满足 $\sum_{j=1}^6 z_j = 0$. 问至少有多少个三元组 $(j, k, l), 1 \leq j < k < l \leq 6$, 使得 $z_j + z_k + z_l \in B$?

(上海大学 冷岗松, 北京大学学生 吴东晓 供题)

第三题. 设 $f(x)$ 为定义在整数集上的有理系数多项式. 若 f 次数为 0 或 1, 则称 $f(x)$ 的取整函数为简单函数; 否则称 $f(x)$ 的取整函数为复杂函数 (定义域仍为整数集). 证明: 用简单函数通过四则运算能表示出每一个复杂函数.

(雅礼中学学生 尹龙晖 供题)

第四题. n 维空间中至多有多少个模长不小于 1 的向量, 它们两两的内积为 0 或 1?

(APMO 2017 改编问题)