难度评估与问题创作

冷 岗 松

上海大学

2017 年 6 月•广州中山

如果说数学研究中有什么比较神秘的话, 那并不是困难问题的存在—— 实际上, 要创造出奇难无比的问题很容易——而是居然有足够的问题恰好有相当的难度, 从而钓住数以千计的数学家. 要实现这一点, 这些问题必须得有挑战性, 但同时也必须让人们看到可能解决的一线希望.

——T. Gowers

一. 关于难度的困惑与思考

1. 快速增长的难度带来的负效应

- 打击大多数参赛者的自信心
- 学习难度增大
- 活动小众化
- 数学竞赛趋同于初等数学研究

2. 难度的再认识

- 适中的难度 (受启迪、可企及、有挑战性)
- 难度 $\neq$ 深刻度
- 难题 $\neq$ 好题

3. 命题中的难度评估

- 背景新颖性分析
- 解法单一还是多样
- 入口难易分析
- 灵巧还是功夫
- 难点个数 (思维纵深度)
- 总结与讨论 (实践检验, 谦卑之心)

1. 选题时的难度评估

$$\begin{cases} \text{反对低水平重复} \\ \text{反对盲目拔高} \\ \text{对全国联赛问题的难度要有整体认识} \end{cases}$$

2. 教学中问题的难度调控

碰到好的难题, 根据学生的程度和学习目标, 有时需要作难度的调节 (时常是降低)

调节策略

- 增设阶梯
- 抽取特例
- 去掉迷雾

例. (2010 年罗马尼亚大师杯)

对每一个正整数 n, 求具有下述性质的最大常数 c_n, 对任意 n 个定义在闭区间 $[0,1]$ 上的实值函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$, 都存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $0 \le x_i \le 1$ 且

$$\left|f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) - x_1 x_2 \cdots x_n\right| \ge c_n.$$

这是 Klamkin 早年的一个问题.

难度评估: CMO 水平中的难题.

难度调控: 抽取 $n = 2$ 时特例, 这就是下面的问题:

求最大的常数 c 使得对任意定义在闭区间 $[0,1]$ 上的实值函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$ 使得

$$\left|f(x_1)+g(x_2)-x_1x_2\right| \geq c.$$

略解: 考虑 $F(x,y)=f(x)+g(x)-xy$ 在 $(1,1),(1,0),(0,0),(0,1)$ 处的值 $\left|f(1)+g(1)-1\right|, \left|f(1)+g(0)\right|, \left|f(0)+g(0)\right|, \left|f(0)+g(1)\right|$.

因为

$$\begin{aligned}&\left|f(1)+g(1)-1\right|+\left|f(0)+g(0)\right|+\left|f(1)+g(0)\right|+\left|f(0)+g(1)\right|\\ \geq&\left|f(1)+g(1)-1+f(0)+g(0)-f(1)-g(0)-f(0)-g(1)\right|=1.\end{aligned}$$

所以左边 4 个值中必有一个不小于 $\frac{1}{4}$. 这说明存在 $x_1, x_2 \in [0,1]$ 使得 $\left|f(x_1)+g(x_2)-x_1x_2\right| \geq \frac{1}{4}$.

另一方面, 取 $f(x)=g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$, 这时有

$$\left|f(1)+g(1)-1\right|=\frac{1}{4},$$

因此 $\frac{1}{4}$ 是最优的. □

$$\text{难度评估:}\begin{cases}\text{背景新颖}\\ \text{入口两个 (不难) : 边值想法, 线性函数}\\ \text{技巧手段 : 平均值原理, 三角不等式}\\ \text{总体难度 : 全国联赛二试水平的中等题}\end{cases}$$

1. 关于单位圆的 Chebyshev 常数问题

Ambrus, Ball 等在 Bull London Math. Soc, 45 (2013) 上发表了一篇题为“Chebyshev constant for the unit circle”的文章, 文中的主要结果是:

定理

对 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是单位圆上的任意 n 个点, 则存在单位圆上的一点 z 使得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k|^2} \leq \frac{n^2}{4}.$$

且常数 $\frac{n^2}{4}$ 是最佳的.

这个定理的证明似乎一定要用复分析工具, 不能用作竞赛题.

考虑 $n=3$ 的特例, 这就产生了一个全国联赛水平的中等偏难的竞赛问题:

题 1 (数学新星网第 15 期征解题)

设 z_1,z_2,z_3 是模为 1 的三个复数, 证明: 存在模为 1 的复数使得

$$\frac{1}{|z-z_1|^2}+\frac{1}{|z-z_2|^2}+\frac{1}{|z-z_3|^2}\le\frac{9}{4}.$$

进一步思考, 实数区间上是否有类似的问题呢? 这使我们联想起下面著名问题:

题 2 (第 40 届普特南)

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n \in [0,1]$. 证明: 存在 $x \in [0,1]$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x-p_i|} \le 8n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

这个联想是一个有趣的发现, 它说明这个普特南问题的背景或许就是关于实区间的 Chebyshev 常数问题.

另外思考和猜想:

1) 混合型的 Chebyshev 问题 (可能是平凡的).

2) 关于实区间的标准 Chebyshev 问题: 是否能定出一个最佳常数 c_n 使得对 $\forall\, p_1, p_2, \cdots, p_n \in [-1, 1]$, 存在 $x \in [-1, 1]$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x - p_i|^2} \le c_n.$$

3) 关于正方形的 Chebyshev 问题: 求最佳常数 λ_n 使得对单位正方形 Q 上的任意 n 个点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 存在点 $x \in Q$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\|x - p_k\|^2} \le \lambda_n.$$

2. 短向量问题

题 3 (ShahAli, AMM 2010)

若 R^n 中的一个向量 v 满足 $|v| \le 1$, 则称它为短向量. 若 $v_1, v_2, \cdots, v_6$ 是平面上六个和为零的短向量. 证明: 其中某三个向量的和仍是短向量;

难度评估: 这是集训队水平中的难题, 既要作组合与几何的处理, 还对代数运算有较高的要求.

2014 年, 牟晓生介绍了上述问题的如下推广

题 4

设平面上的 $2n$ 个单位向量的和为零. 证明: 存在其中的 n 个, 它们的和的模长不超过 1.

我们的思考:

1) 一维实数情形

题 5

已知 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 是区间 $[-1,1]$ 上的六个和为零的实数, 问: 至少有多少个三元组 (i,j,k), $1 \le i < j < k \le 6$, 使得 $x_i + x_j + x_k \in [-1,1]$.

答案: 12.

难度评估: 这是一个全国联赛二试水平的中等难度的问题.

2) 正方形的短向量问题

注意到一个向量 v 是短向量等价于 v 属于欧氏单位圆. 我们将单位圆改变为单位正方形 (l_∞^2 范数下的单位圆), 这就产生了

题 6 (2017 新星夏季奥林匹克试题)

设 $A=\left\{z=x+yi \,\middle|\, |x|\le 1, |y|\le 1, x,y\in\mathbf{R}\right\}$, 已知 $z_1, z_2, \cdots, z_6 \in A$. 若 $\sum_{i=1}^{6} z_i = 0$, 证明: 存在 $1\le i<j<k\le 6$ 使得 $z_i+z_j+z_k\in A$.

这个题一般的解法是把题 5 作为引理. 另外一种巧妙的证法是用反证法并对三元数组和的位置进行对称分析.

难度评估: 这是一个以代数面貌出现的组合问题, 是全国联赛水平中的难题.

题 6 的一个加强版本是

题 7 (新星征解第二十二期问题)

设 $A = \left\{ z = x + yi \,\middle|\, |x| \le 1, |y| \le 1, x, y \in \mathbf{R} \right\}$, 已知 $z_1, z_2, \cdots, z_6 \in A$, 满足 $\sum_{i=1}^{6} z_i = 0$. 问至少有多少个三元组 (i, j, k), $1 \le i < j < k \le 6$, 使得 $z_i + z_j + z_k \in A$?

答案: 6.

难度评估: 这是一个 CMO 水平的中等难度的问题.

3. 序排列问题

先看一个简单问题

题 8

问是否存在 $1, 2, \cdots, 50$ 的 4 个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$; $b_1, b_2, \cdots, b_{50}$; $c_1, c_2, \cdots, c_{50}$; $d_1, d_2, \cdots, d_{50}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{50} a_i b_i = 2 \sum_{i=1}^{50} c_i d_i \ ?$$

略解: 答案是否定的. 事实上, 记 $S = \sum_{i=1}^{50} i x_i$, 则

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^{50} i^2 = 42925, \quad S_{\min} = \sum_{i=1}^{50} i(51 - i) = 22100.$$

因 $S_{\max} < 2S_{\min}$, 便知等式不可能成立. $\square$

这个问题当然可平凡推广到一般的 n.

下面的问题, 作为题 8 的加强, 却是不平凡的:

设 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 记 $f(x)=x_1+2x_2+\cdots+nx_n$, 问 $f(x)$ 是否可取到数 $\sum\limits_{i=1}^{n} i(n+1-i)$ 和数 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$ 之间的一切整数?

2009 年, 熊斌教授和我研究了这个问题. 我们先看 $n=3$ 的情况: 设 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 $1,2,3$ 的一个排列, 则 $f(x)=x_1+2x_2+3x_3$ 的取值范围是 $\{10,11,13,14\}$, 但不能取 12.

12 是一个 "间断点" !

这诱发我们思考: 对怎样的 n, 问题有间断点? 对怎样的 n, $f(x)$ 的取值是一个连续正整数集.

通过探讨, 发现 $n \geq 4$ 时 $f(x)$ 的取值没有间断点.

题 9 (熊斌, 冷岗松)

设 $n \geq 4$ 是正整数, 记 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列的集合为 A. 对 $\forall\ x_n = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$, 记 $f(x_n) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$, 则 $\{f(x_n) \mid x_n \in A\}$ 是一个连续正整数集.

难度评估: 这是一个全国联赛二试中等难度的问题.

此题后来提供给 2010 年的东南比赛, 遗憾的是被命题组改为求 $|M_9|$ 的值, 变为了一个平凡的问题.

4. 关于序列差分的最值问题

雅礼中学学生汤继尧提出了如下离散 Opial 型极值问题.

题 10 (新星征解第 19 期问题)

给定正整数 $n \geq 4$, 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$. 求 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i|x_i - x_{i+1}|$ 的最大值, 其中 $x_{n+1} = x_1$.

答案: $S_{\max} = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$

这是一个较高难度的有趣的问题, 汤提供了一个优雅的解法.

我们建议汤进一步研究二阶差分及二次情况的变式, 随后汤提出并解决了下面的问题:

题 11

设 $n \geq 3$ 是给定的正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$. 求 $\sum_{i=1}^{n} x_i |x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}|$ 的最大值, 其中 $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$.

答案: 所求的最大值为 n.

题 12

设 $n \geq 4$ 是偶数, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$. 求 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i |x_i^2 - x_{i+1}^2|$ 的最大值, 其中 $x_{n+1} = x_1$.

答案: 所求最大值为 $\frac{16}{27} n$.

这里介绍汤提出的另外一个函数问题. 他首先研究了如下简单问题:

求所有函数 $f : N^* \to N^*$, 使得对 $\forall\, x, y \in N^*$ 均有

$$xy \mid f(x)f(y) - 1.$$

略解: 注意到对 $\forall\, x, y \in N^*$ 均有 $(y, f(x)) = 1$, 故 $f(x) = 1$. □

汤首先研究了这个问题的多种解法, 并选择一种本质的解法进行演变, 提出了各种推广版本, 其中最佳的版本是下面的问题:

题 13 (新星网学生专栏)

试求所有满足下面条件的函数 $f: N^* \to N^*$: 存在 $N_0 \in N^*$, 对 $\forall\, x, y \in N^*$, 当 $xy \geq N_0$ 时均有

$$f(x)f(y) \mid (f(x)-x)(f(y)-y)-1.$$

解法提示: 根据 $f(x)$ 的值域是无限集和有限集两种情况进行讨论. 值域是有限集的情况是处理的难点, 需要综合运用组合数论的手段并要求有较高的代数变形能力.

难度评估: 集训队水平中的难题.

5. 两个组合问题

2016 年中国西部数学邀请赛中我提供了如下问题:

题 14 (中国西部, 2016)

给定正整数 n, k, $k \le n-2$. 设实数集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的任意 k 元子集的元素和的绝对值不超过 1. 证明: 若 $|a_1| \ge 1$, 则对 $\forall\, 2 \le i \le n$ 都有 $|a_1| + |a_i| \le 2$.

问题来源: 这是 K. Snanepoel 论文 (Trans. Amer. Math. Soc, 368(2016)) 的一个引理.

难度评估: 西部中等偏难的题, 全国联赛难题.

考试得分统计: 参考的 200 名选手共有 32 人基本做对此题.

下面的组合问题是已知的

证明: 存在正整数 n, 使得边长为 n 的正三角形被平行于边的直线分成 n^2 个边长为 1 的小正三角形, 则从这些小正三角形的顶点中可以取出 $\geq 1993n$ 个点, 使得其中任何三点不能组成正三角形.

我们把这个提法用于格点阵的等腰直角三角形问题, 得到了一个较为简单的小组合问题:

题 15（2017 新星春季奥林匹克试题)

证明: 对一切 $c \in R^+$, 存在正整数 n 使得可以在 $n \times n$ 的正方形方格点阵中取出 $\geq cn$ 个点, 且取出的任何三点不构成直角边平行于坐标轴的等腰直角三角形.

谢　谢!