好题与妙解（五）

——2017 新星夏季精品班两次测试题

冷岗松　吴尉迟　赵岩

2017 年 5 月 28 日和 30 日, 上海数学新星秋季精品班举行了两次测试 (小考). 每次测试四题, 时间 2 小时. 本文介绍这两次测试试题的解答. 我们将用题 1.x 表示第 1 次测试的第 x 题, 题 2.y 的意义类似. 值得指出的是, 其中一些解法是和雅礼中学尹龙晖、刘哲成两位同学讨论得到的, 在此表示感谢.

题 1.1　证明: 序列 $a_n = \underbrace{33\cdots3}_{n\text{ 个}}1$, $n = 1, 2, \cdots$ 中一定包含无穷多个合数.

证法一　由 $a_n = \underbrace{33\cdots3}_{n\text{ 个}}1$ 知 $a_n = \frac{10^{n+1}-7}{3}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

令 $n = 30t + 1$ $(t \in \mathbb{N}^*)$, 注意到 31 是素数, 且 $(10, 31) = 1$, 由 Fermat 小定理, 有

$$\begin{aligned}10^{n+1} - 7 = 10^{30t+2} - 7 &= (10^{30})^t \cdot 10^2 - 7\\ &\equiv 10^2 - 7 \equiv 0 \pmod{31}.\end{aligned}$$

又 $a_n = \frac{10^{n+1}-7}{3} \in \mathbb{N}^*$, 且 $(3, 31) = 1$, 所以 $31 \mid a_n$.

又注意到 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 所以 $a_n \geq a_{31} > 31$. 从而 a_n 为合数.

由 t 的任意性得 $\{a_n\}$ 中包含无穷多个合数. □

证法二　由题意知 $a_n = \frac{10^{n+1}-7}{3}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. 注意到

$$10^9 = 10 \cdot (10^2)^4 \equiv 10 \times (-2)^4 \equiv 10 \times (-1) \equiv 7 \pmod{17},$$

由 $(10, 17) = 1$, 以及 Fermat 小定理, 可得

$$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

因此, 取 $n = 16k + 8$ $(k \in \mathbb{N})$, 则

$$10^{n+1} - 7 = 10^{16k+9} - 7 \equiv 10^9 - 7 \equiv 0 \pmod{17}.$$

收稿日期: 2017-06-05.

又 $(3,17)=1$, 且 $10^{n+1}-7\geq 10^9-7>17$. 因此, 对于 $n=16k+8\ (k\in\mathbb{N})$, 有 a_n 为合数.

故 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为合数. □

评注 事实上, 常系数线性递推数列在模 $m(m\in\mathbb{N}^*)$ 意义下是周期数列, 故由 $a_{n+1}=10a_n+21$ 知 $\{a_n\}$ 是 $\bmod p$ 的周期数列, 于是只需用费马小定理找一个初始项为 p 的倍数即可.

题 1.2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 记

$$b_k=\frac{a_k}{a_k^2+a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2},k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $a_{n+1}=a_1$. 证明:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\geq\frac{1}{9}.$$

证明 先证一个局部. 对任意 $1\leq k\leq n$, 由均值及柯西不等式得

$$\left(a_k^2+a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2\right)^2\leq\frac{9}{4}\left(a_k^2+a_{k+1}^2\right)^2\leq\frac{9}{2}\left(a_k^4+a_{k+1}^4\right).$$

从而, 由柯西不等式, 有

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^n a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)&\geq\left(\sum_{k=1}^n a_k^4\right)\cdot\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^n a_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^n\left(a_k^2+a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2\right)^2}\\&\geq\frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^n(a_k^4+a_{k+1}^4)\right)\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^n(a_k^4+a_{k+1}^4)}\right)\\&\geq\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

证毕. □

评注 利用均值及柯西不等式将 b_k^2 化为 $\frac{9}{2}\left(a_k^4+a_{k+1}^4\right)$, 然后再次利用柯西不等式可得结果.

题 1.3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=AC$. B_1,C_1 分别是边 AB,AC 上的点使得 $BB_1=AC_1$. 点 S 与 B,C 位于直线 B_1C_1 的同一侧且使得

$$\angle SB_1C_1=\angle SC_1B_1=\angle BAC.$$

证明: B,C,S 共线的充要条件是 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

证法一 如图 3-1 所示. 过点 B_1 作 AC 的平行线交 BC 于点 P, 连接 PC_1.

则由 $B_1P \parallel AC$, 知

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1C}.$$

从而 $C_1P \parallel AB$, 即四边形 AB_1PC_1 为平行四边形. 故

$$\angle C_1PC=\angle ABC=\angle ACB=\angle B_1PB.$$

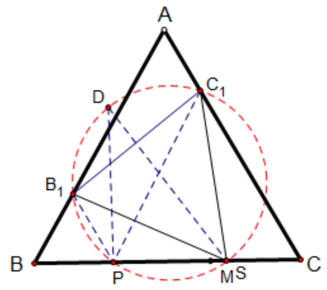

图 3-1

所以 BC 为 $\angle B_1PC_1$ 的外角平分线.

从而 BC 经过 $\triangle B_1PC_1$ 外接圆 $\widehat{B_1PC_1}$ 的中点 M. 事实上, 作 $\angle B_1PC_1$ 的内角平分线交 $\odot B_1PC_1$ 于点 D. 则 $\angle DPC=90^\circ$, $\odot B_1PC_1$ 交 BC 于 M, 从而 DM 为直径, 即 M 为 $\widehat{B_1PC_1}$ 中点.

故

$$\begin{aligned}
\angle BAC=60^\circ &\Leftrightarrow \angle BAC=180^\circ-2\angle BAC\\
&\Leftrightarrow \angle B_1PC_1=\angle B_1SC_1\\
&\quad(\text{因为 } \angle B_1PC_1=\angle BAC, \angle SB_1C_1=\angle SC_1B_1=\angle BAC)\\
&\Leftrightarrow \angle B_1MC_1=\angle B_1SC_1\\
&\Leftrightarrow M \text{ 与 } S \text{ 重合 (因为 } S, M \text{ 均在 } B_1C_1 \text{ 中垂线上)}\\
&\Leftrightarrow S \text{ 在 } BC \text{ 上}.
\end{aligned}$$

结合 $AB=AC$, 知 $\triangle ABC$ 为等边三角形 $\Leftrightarrow S, B, C$ 三点共线. □

证法二 先证充分性: 当 $\triangle ABC$ 为正三角形时, 由 $\angle SB_1C_1=\angle SC_1B_1=\angle BAC=60^\circ$, 知 $\triangle B_1C_1S$ 也为正三角形. 从而由 $B_1S=B_1C_1$, $BB_1=AC_1$, 以及

$$\begin{aligned}
\angle BB_1S&=180^\circ-\angle SB_1C_1-\angle AB_1C_1\\
&=120^\circ-\angle AB_1C_1\\
&=180^\circ-\angle BAC-\angle AB_1C_1\\
&=\angle AC_1B_1,
\end{aligned}$$

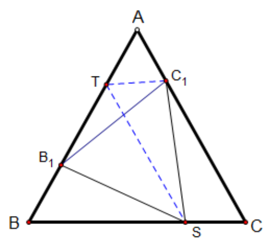

图 3-2

知 $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle BSB_1$. 从而 $\angle B_1BS=\angle B_1AC_1=60^\circ=\angle ABC$.

故 S 在直线 BC 上, 从而 S, B, C 三点共线.充分性得证.

再证必要性: 当 B, S, C 三点共线时,

$$\begin{aligned}
\angle BB_1S&=180^\circ-\angle AB_1C_1-\angle SB_1C_1\\
&=180^\circ-\angle AB_1C_1-\angle BAC=\angle AC_1B_1.
\end{aligned}$$

同理, $\angle SC_1C=\angle AB_1C_1$.

由 $AB=AC$, 知 $\angle ABC=\angle ACB$. 由正弦定理, 有

$$\frac{\sin\angle BB_1S}{BS}=\frac{\sin\angle ABC}{B_1S}=\frac{\sin\angle ACB}{C_1S}=\frac{\sin\angle SC_1C}{SC}.$$

于是

$$\frac{BS}{CS}=\frac{\sin\angle BB_1S}{\sin\angle CC_1S}=\frac{\sin\angle AC_1B_1}{\sin\angle AB_1C_1}=\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{AB_1}{BB_1}.$$

在边 AB 上取点 T, 使得 $AT=BB_1$, 连接 TC_1, TS. 则

$$\frac{BT}{TA}=\frac{AB_1}{BB_1}=\frac{BS}{CS}, \Rightarrow\ TS\parallel AC.$$

从而 $\angle B_1TS=\angle BAC=\angle SC_1B_1$, 故 B_1,S,C_1,T 四点共圆. 于是 $\angle SB_1C_1=\angle STC_1$.

注意到 $AT=BB_1=AC_1$, 知 $TC_1\parallel BC$. 所以 $\angle BAC=\angle SB_1C_1=\angle STC_1=\angle ACB$. 综合 $AB=AC$, 知 $\triangle ABC$ 为等边三角形. □

证法三 只证明必要性:

由 $\angle SB_1C_1=\angle SC_1B_1=\angle BAC$, 知 B_1S, C_1S 为 $\odot AB_1C_1$ 的切线. 设 $\triangle AB_1C_1$ 的外接圆半径为 R.

由 $B_1S=C_1S$, $\angle B=\angle C$, 知 $\triangle BSB_1$ 与 $\triangle C_1SC$ 的外接圆为等圆. 设外接圆半径为 R'.

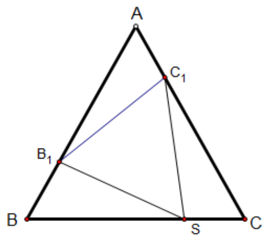

图 3-3

由正弦定理,

$$BS=2R'\cdot\sin\angle BB_1S=2R'\cdot\sin\angle AC_1B_1=\frac{R'}{R}\cdot AB_1.$$

同理, $SC=\frac{R'}{R}AC_1$.

因为 $AC_1=BB_1$, 得

$$BC=BS+SC=\frac{R'}{R}AB_1+\frac{R'}{R}AC_1=\frac{R'}{R}\cdot AB.$$

又由正弦定理, 有

$$\sin A=\frac{R'}{R}\sin C. \tag{1}$$

又因为 $B_1S=2R'\cdot\sin B$, 且 $B_1S=\frac{B_1C_1}{2\cos A}=\frac{2R\sin A}{2\cos A}=R\cdot\tan A$. 故

$$\frac{R'}{R}=\frac{\tan A}{2\sin B}. \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知

$$\frac{\tan A}{2\sin B}=\frac{\sin A}{\sin C}.$$

注意到 $B=C$, 有 $\cos A=\frac{1}{2}$. 故 $A=60^\circ$.

结合 $AB=AC$, 知 $\triangle ABC$ 为等边三角形. $\square$

评注 充分性易于证明, 只需证明 $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle BSB_1$; 必要性可以通过同一法或者正弦定理计算角度得到.

题 1.4 设 m 是正整数, $m \geq 2$, 整数 $s > \frac{m(m+1)}{2}$. 证明: 存在正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_s$ 使得 $\{x_i\}$ 不是 $\{y_i\}$ 的排列, 且对 $\forall k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 有

$$\sum_{j=1}^{s} x_j^k = \sum_{j=1}^{s} y_j^k.$$

证明 不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 互不相等.

对于给定的充分大的正整数 N, 考虑集合

$$A = \{\{x_1, x_2, \cdots, x_s\} \mid 1 \leq x_i \leq N, 1 \leq i \leq s\},$$

则

$$|A| = \frac{N(N-1)\cdots(N-s+1)}{s!}.$$

记 $T_k = \sum\limits_{j=1}^{s} x_j^k$ $(k=1, 2, \cdots, m)$. 考虑集合

$$B = \{(T_1, T_2, \cdots, T_m) \mid \{x_1, x_2, \cdots, x_s \in A\}\}.$$

由于 $T_k = \sum\limits_{j=1}^{s} x_j^k \leq s \cdot N^k$, 故

$$|B| \leq s^m \cdot N^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

注意到 $\frac{N(N-1)\cdots(N-s+1)}{s!}$ 是关于 N 的 s 次多项式, 且 $s > \frac{m(m+1)}{2}$. 故可取充分大的正整数 N, 使得

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-s+1)}{s!} > s^m \cdot N^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

从而存在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 与 $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ 不同, 使得对任意 $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$\sum_{j=1}^{s} x_j^k = \sum_{j=1}^{s} y_j^k.$$

$\square$

评注 有些同学采用归纳法证明此题, 但没有做完. 这是因为归纳证明需要对 k 或 s 归纳, 对 s 归纳奠基困难, 对 k 归纳递归困难; 此题可采用计数方法(抽屉原理证明), 为了能计数, 自然要给 x_i 加上一个界, 此题可以取 x_i 为 $[1, N]$ 中的整数.

题 2.1 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是 4 个模为 1 的复数, 且满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. 证明: z_1, z_2, z_3, z_4 中必有两个的和为零.

证法一 注意到复平面内的三角形 z_1, z_2, z_3 的重心 $z_1 + z_2 + z_3 = -z_4$ 在单位圆上, 而锐角三角形的重心在外接圆内, 钝角三角形的重心在外接圆外, 故三角形 z_1, z_2, z_3 构成直角三角形, 从而 $z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_3 + z_1$ 之一为 0. □

证法二 若 z_1, z_2, z_3, z_4 共线, 则由题设知, $z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_3 + z_1$ 之一为 0. 若 z_1, z_2, z_3, z_4 不共线, 设 $\overrightarrow{z_1}$ 的起点为 A, 终点为 B; $\overrightarrow{z_2}$ 的起点为 B, 终点为 C; $\overrightarrow{z_3}$ 的起点为 C, 终点为 D; $\overrightarrow{z_4}$ 的起点为 D, 终点为 A. 则由 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ 知四边形 $ABCD$ 是菱形, 故 $z_1 + z_4 = 0$. □

证法三 注意到

$$
\begin{aligned}
& (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_1 + z_4) \\
= & z_1^3 + z_1^2(z_2 + z_3 + z_4) + z_1(z_2z_3 + z_3z_4 + z_2z_4) + z_2z_3z_4 \\
= & z_1^2(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + z_1z_2z_3z_4(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4}) = 0
\end{aligned}
$$

从而 $z_1 + z_2, z_1 + z_3, z_1 + z_4$ 中必有一项为 0. □

证法四 令 $u_1 = \frac{z_1}{z_4}$, $u_2 = \frac{z_2}{z_4}$, $u_3 = \frac{z_3}{z_4}$. 则

$$u_1 + u_2 + u_3 = -1, \tag{1}$$

且 $|u_1| = |u_2| = |u_3| = 1$. 从而

$$\overline{u_1 + u_2 + u_3} = -1,$$

即 $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3 = -1$. 又因为 $u_i\overline{u}_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, 于是

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = -1.$$

即 $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = -u_1u_2u_3$. 令

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = k = -u_1u_2u_3. \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知 u_1, u_2, u_3 为方程

$$x^3 + x^2 + kx + k = 0$$

的根. 而 -1 也是该方程的根.

故 u_1, u_2, u_3 中有一个为 -1.

从而 z_1, z_2, z_3, z_4 中有两个复数之和为 0. □

评注 本题是一道简单题. 从几何的观点去看, 其一, 由三角形 z_1, z_2, z_3 的重心 $z_1 + z_2 + z_3 = -z_4$ 在单位圆上, 得出三角形 z_1, z_2, z_3 是直角三角形; 其二, 由 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 知可构造四边形, 加上边长关系可得该四边形为菱形.从代数的观点看, 若 z_1, z_2, z_3, z_4 中有两项之和为零, 则由 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 知 $z_1 + z_2, z_1 + z_3, z_1 + z_4$ 中必有一项为 0.

题 2.2 设 $ABCD$ 是一个等腰梯形 ($AD \parallel BC$), 点 K 和 N 分别是边 AB 和 CD 上的点且使得 $AK = CN$. 线段 KN 与对角线 AC 和 BD 分别交于 S 和 T. 证明: $\triangle AKS$, $\triangle BKT$, $\triangle CNS$ 和 $\triangle DNT$ 这四个三角形的外接圆共点.

证明 取四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心 O, 连接 OB, OC, OK, ON.

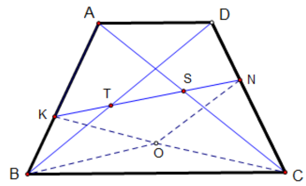

图 1-1

注意到 $ABCD$ 是一个等腰梯形, 则 O 在 BC 的中垂线上, 从而 $\angle KBO = \angle OCD = \angle ODC$.

又 $OB = OD$, $KB = DN$, 所以

$$\triangle KBO \cong \triangle NDO.$$

从而 $OK = ON$, $\angle KOB = \angle DON$. 于是 $\angle BOD = \angle KON$.

注意到 $\triangle BOD$ 与 $\triangle KON$ 均为等腰三角形, 所以

$$\angle OKN = \angle ONK = \angle OBD = \angle ODB.$$

故 K, B, O, T; D, N, O, T 分别四点共圆.

同理, K, A, S, O; C, N, S, O 也分别四点共圆.

故 $\triangle AKS, \triangle BKT, \triangle CNS$ 和 $\triangle DNT$ 这四个三角形的外接圆共点 (即为等腰梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心). $\square$

评注 本题可以从两方面理解: 其一,若记 AC 和 BD 交于 M, 此题本质上等价于完全四边形 $AKBTSM, DMTSCN$ 的 Miquel 点共点; 其二, 从几何变换来看, 由于线段 AKB 全等于线段 CND, 存在点 O, 使得以 O 为中心作旋转变换, 可以使 AKB 旋转到 CND, 点 O 即为题中四圆所共的点.

题 2.3 设函数 $L(n): \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 定义如下: $L(n)$ 是 m 个连续正整数的乘积总被 n 整除的最小正整数 m. 例如 $L(2) = 2$, $L(6) = 3$, $L(100) = 10$. 对 $m \in \mathbb{N}^*$, 令 $A(m) = \{n \mid L(n) = m\}$.

(a) 如果 p 是素数, 求 $A(p)$;

(b) 求 $|A(14)|$, 并确定 $A(14)$ 中的最大元和最小元.

证明 注意到, 任意连续 m 个正整数的乘积都能被 $m!$ 整除. 故 $L(n)$ 是使 $n \mid m!$ 的最小正整数 m. 从而

$$A(m)=\{n \mid L(n)=m\}=\{n \mid n \ \mid \ m!, n \nmid (m-1)!\}.$$

(a) 当 p 为素数时, 由 $A(p)=\{n \mid n \ \mid \ p!, n \nmid (p-1)!\}$ 知对任意 $n \in A(p)$, 有 $p \mid n$.

事实上, 若 $p \nmid n$, 则由 $n \mid p!$ 知 $n \mid (p-1)!$ 这与 $n \in A(p)$ 矛盾. 故

$$A(p)=\{pn \mid n \mid (p-1)!\}.$$

(b) 由 $A(14)=\{n \mid n \ \mid \ 14!, n \nmid 13!\}$, 即知 $A(14)$ 是由 $14!$ 的正约数去掉 $13!$ 的正约数构成. 注意到

$$13!=2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11\times 13,$$

$$14!=2^{11}\times 3^5\times 5^2\times 7^2\times 11\times 13.$$

故 $|A(14)|=\tau(14!)-\tau(13!)=1008$.

$A(14)$ 中的最大元显然为 $14!$.

$A(14)$ 中的最小元为 49. □

评注 此题需要注意到任意连续 m 个正整数的乘积都能被 $m!$ 整除.

题 2.4 设 $A=\{1,2,\cdots,9\}$. 求满足下面条件的双射 $f: A\to A$ 的个数: 存在至少一个 $i\in A$ 使得 $|f(i)-f^{-1}(i)|>1$.

解 满足条件的双射 f 的个数为 359108.

我们称正整数数组 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 为“$k-$圈”, 如果对任意 $1\le t\le k$, 有 $f(i_t)=i_{t+1}$, 且 $i_{k+1}=i_1$.

下面, 我们考虑满足$(*)$: $\forall\, 1\le i\le 9$, $|f(i)-f^{-1}(i)|\le 1$ 的双射 f 的个数.

将 $1,2,\cdots,9$ 分成若干个互不相交的图的并, 我们证明只存在“$1-$圈”, “$2-$ 圈”, “$4-$圈”.

事实上, 对满足 $(*)$ 的一个“$k-$圈”, 有

$$\begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-1} & i_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 \end{array}.$$

(1) 若 $k=3$, 则

$$|i_1-i_3|=1,\ |i_2-i_1|=1,\ |i_2-i_3|=1,$$

其中 i_1, i_2, i_3 互不相同.

不妨设 i_1 最大, 则 $i_2 = i_1 - 1$, $i_3 = i_1 - 1$, 即 $i_2 = i_3$, 这是矛盾的.

故 $k \neq 3$.

(2) 若 $k \geq 5$, 则不妨设 i_1 最大. 由

$$|i_1 - i_3| = 1,\ |i_{k-1} - i_1| = 1,$$

有 $i_3 = i_1 - 1,\ i_{k-1} = i_1 - 1,$ 得 $i_3 = i_{k-1}$.

但当 $k \geq 5$ 时, $i_{k-1} \neq i_3$, 这是矛盾的!

故 $k \leq 4$.

故只存在“1−圈”, “2−圈”和“4−圈”.

又对任一个“4−圈”, (i_1, i_2, i_3, i_4) 满足 $|i_1 - i_3| = |i_2 - i_4| = 1$. 即“4−圈”中是形如 $i, i+1, j, j+1$ ($1 \leq i < j \leq 8$ 且 $j \neq i+1$) 这样的四个数 (两个奇数, 两个偶数).

下面分三种情况计数:

(i) 存在两个“4−圈”. 此时有 4 组相邻的数, 余下的数必为奇数. 从 $1, 3, 5, 7, 9$ 中任取一个. 有 5 种方式. 此时 4 组相邻的数唯一确定.

其组合方式, 将这 4 组相邻数分为两个“4−圈”. 有 3 种方式, 而每个圈内都有两种可能, 故满足条件 $(*)$ 的双射的个数为

$$5 \times 3 \times 2^2 = 60\ (\text{种}).$$

(ii) 恰有一个“4−圈”, 包含的数为 $i, i+1, j, j+1$. $1 \leq i < j \leq 8$, $j \neq i+1$. 此时有 $2\mathrm{C}_7^2 = 42$ 种. (圈内都有两种可能).

剩下的 5 个数被分成若干个“1−圈”与“2−圈”的并. 由于

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 \to 1\ \text{种} \\ &= 1+1+1+2 \to \mathrm{C}_5^2 = 10\ \text{种} \\ &= 1+2+2 \to \frac{\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_3^2}{2!} = 15\ \text{种}, \end{aligned}$$

此时, 满足条件 $(*)$ 的双射 f 的个数为

$$42 \times (1 + 10 + 15) = 1092\ (\text{种}).$$

(iii) 没有“4−圈”, 注意到

$$\begin{aligned} 9 &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{9\ \text{个}} \to 1\ \text{种} \\ &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{7\ \text{个}} + 2 \to \mathrm{C}_9^2\ \text{种} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{5\text{ 个}}+2+2 \to \frac{\mathrm{C}_9^2\cdot\mathrm{C}_7^2}{2!}\\
&= 1+1+1+2+2+2 \to \frac{\mathrm{C}_9^2\cdot\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_5^2}{3!}\\
&= 1+2+2+2+2 \to \frac{\mathrm{C}_9^2\cdot\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^2}{4!},
\end{aligned}
$$

此时, 满足条件 $(*)$ 的双射 f 的个数为

$$1+\mathrm{C}_9^2+\frac{\mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_7^2}{2!}+\frac{\mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_5^2}{3!}+\frac{\mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_7^2\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^2}{4!}=2620\ (\text{种}).$$

综上, 满足原题设要求的 f 共有

$$9!-(60+1092+2620)=359108\ (\text{个}).$$

$\square$

评注 首先, 自然要考虑这个问题的反面; 若将 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 对应一个图 9 个点, 若 $f(i)=j$ 则连一条从 i 到 j 的边, 注意到各个点的出度和入度均为 1, 故这个图由若干个圈组成, 考虑圈长的可能性, 再分类讨论.