第 58 届国际数学奥林匹克

瞿振华

(华东师范大学数学系, 200241)

巴西 里约热内卢

第一天

7 月 18 日 9:00 – 13:30

1. 对每个整数 $a_0 > 1$, 定义数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 如下: 对于任意的 $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{若 } \sqrt{a_n} \text{ 是整数}, \\ a_n + 3, & \text{其它情况}. \end{cases}$$

试求满足下述条件的所有 a_0 : 存在一个数 A, 使得对无穷多个 n, 有 $a_n = A$.

(南非 供题)

解 满足条件的 a_0 是所有 3 的倍数.

由于 a_{n+1} 仅由 a_n 确定, 故序列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项相等, 当且仅当序列最终周期, 也当且仅当序列有界.

注意到完全平方数模 3 同余 0 或 1. 若有某项 $a_k \equiv 2 \pmod 3$, 则 a_k 不是平方数, $a_{k+1} = a_k + 3$, 并且 $a_{k+1} \equiv 2 \pmod 3$, 由归纳法可知, 对 $m \geq k$, 都有 $a_{m+1} = a_m + 3$, 序列从 a_k 起严格递增, 于是无上界. 特别, 若 $a_0 \equiv 2 \pmod 3$, 这样的 a_0 不满足条件.

若 $3 \mid a_k$, 则不论 $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ 或 $a_{k+1} = a_k + 3$, 仍然有 $3 \mid a_{k+1}$, 由归纳法, 对 $m \geq k$, a_m 都是 3 的倍数. 特别, 若 $3 \mid a_0$, 则序列中每一项都被 3 整除.

假设 $3 \mid a_0$, 取定一个完全平方数 $N^2 > a_0$, 且 $3 \mid N$. 我们说明对每个 n, 有 $a_n \leq N^2$. 反证法, 假设存在大于 N^2 项, 取最小的 k, 使得 $a_k > N^2$. 由于 $3 \mid a_k$, 故 $a_k \geq N^2 + 3$. 而 $a_{k-1} \leq N^2$, $a_k - a_{k-1} \leq 3$, 故 $a_{k-1} = N^2$, 这样按定义 $a_k = N$, 矛盾. 故不存在 $a_k > N^2$, 因此序列有界, 这样的 a_0 满足要求.

收稿日期: 2017-07-30.

最后考虑 $a_0 \equiv 1 \pmod 3$ 的情况. 易知, 若 $3 \nmid a_k$, 且 $a_k > 1$, 则 $3 \nmid a_{k+1}$, 且 $a_{k+1} > 1$. 因此序列 $\{a_n\}$ 中每一项都不被 3 整除, 且大于 1. 假设 $\{a_n\}$ 有界, 即最终周期, 则每一项都模 3 余 1. 取最终周期中的最大一项 a_k, 则 a_k 是完全平方数, 否则 $a_{k+1} = a_k + 3 > a_k$. 设 $a_k = N^2$, 于是 $a_{k+1} = N$, 从而 $N \equiv 1 \pmod 3$, 且 $N > 1$, 即有 $N \geq 4$. 由于存在 $j > k$, 使得 $a_j = a_k = N^2 > (N-2)^2$, 而 $a_{k+1} = N \leq (N-2)^2$ (注意 $N \geq 4$), 取最小的 $l > k+1$, 使得 $a_l > (N-2)^2$, 从而 $a_{l-1} \leq (N-2)^2 < a_l$, 于是 $a_l = a_{l-1} + 3$. 再由 $a_l \equiv a_{l-1} \equiv 1 \pmod 3$, 可知 $a_{l-1} = (N-2)^2 \equiv 1 \pmod 3$, 这样由定义 $a_l = N-2$, 矛盾. 因此, $a_0 \equiv 1 \pmod 3$ 也不满足要求. 结论获证. □

2. 设 $\mathbb{R}$ 是全体实数构成的集合. 求所有的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得对于任意实数 x 和 y, 都有

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

(阿尔巴尼亚 供题)

解 将题中所给等式记为 $P(x,y)$. 则由 $P(0,0)$ 可知

$$f(f(0)^2) = 0. \tag{1}$$

对任意实数 $x \neq 1$, 存在实数 y, 满足 $x + y = xy$, 事实上, $y = \frac{x}{x-1}$. 由 $P(x, \frac{x}{x-1})$ 可知

$$f\left(f(x) \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0, \quad x \neq 1. \tag{2}$$

以下对 $f(0)$ 分两种情况讨论.

情形一: $f(0) = 0$. 则由 $P(x,0)$ 可知 $f(x) = 0$.

情形二: $f(0) \neq 0$.

结论一: $f(a) = 0$ 当且仅当 $a = 1$.

事实上, 由 (1) 可知存在一个实数 a, 使得 $f(a) = 0$. 若 $a \neq 1$, 则在 (2) 中令 $x = a$, 即得 $f(0) = 0$, 这与 $f(0) \neq 0$ 的假设矛盾.

由结论一以及 (1) 得, $f(0)^2 = 1$, $f(0) = \pm 1$. 先假设 $f(0) = -1$, 因为 $f(0) = 1$ 的情况只需对 $g(x) = -f(x)$ 来讨论, $g(x)$ 也满足同样的函数方程. 由 $P(x,1)$ 得

$$f(0) + f(x+1) = f(x),$$

即 $f(x+1) = f(x) + 1$.

由归纳法易知对任意整数 n, 有

$$f(x+n)=f(x)+n. \tag{3}$$

结论二: f 是单射.

反证法, 假设存在 $a\neq b$, 满足 $f(a)=f(b)$. 由 (3) 可知, 对任意整数 N, 都有

$$f(a+N+1)=f(b+N)+1.$$

选取整数 $N>-b$, 则存在实数 x_0,y_0, 满足 $x_0+y_0=a+N+1,\ x_0y_0=b+N$. 由于 $a\neq b$, 故 $x_0\neq 1,\ y_0\neq 1$. 由 $P(x_0,y_0)$ 得

$$f(f(x_0)f(y_0))+f(a+N+1)=f(b+N),$$

从而 $f(f(x_0)f(y_0))+1=f(f(x_0)f(y_0)+1)=0$. 由结论一得 $f(x_0)f(y_0)+1=1$, 即 $f(x_0)f(y_0)=0$. 但是 $x_0\neq 1,\ y_0\neq 1$, 由结论一, $f(x_0)\neq 0,\ f(y_0)\neq 0$, 矛盾.

对任意实数 t, 由 $P(t,-t)$ 得

$$f(f(t)f(-t))+f(0)=f(-t^2).$$

从而 $f(f(t)f(-t))=f(-t^2)+1=f(-t^2+1)$. 由于 f 单射, 故

$$f(t)f(-t)=-t^2+1. \tag{4}$$

再由 $P(t,1-t)$ 得

$$f(f(t)f(1-t))+f(1)=f(t(1-t)).$$

从而 $f(f(t)f(1-t))=f(t(1-t))$. 由于 f 单射, 故

$$f(t)f(1-t)=t(1-t). \tag{5}$$

由于 $f(1-t)=1+f(-t)$, 比较 (4), (5) 即得 $f(t)=t-1$. 若 $f(0)=1$, 则 $f(t)=1-t$.

容易验证 $f_1(x)=0,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=1-x$ 都是满足要求的. □

3. 一个猎人和一只隐形的兔子在欧氏平面上玩一个游戏. 已知兔子的起始位置 A_0 和猎人的起始位置 B_0 重合. 在游戏的 $n-1$ 回合之后, 兔子位于点 A_{n-1}, 而猎人位于点 B_{n-1}. 在第 n 个回合中, 以下三件事情依次发生.

(i) 兔子以隐形的方式移动到一点 A_n, 使得 A_{n-1} 和 A_n 之间的距离恰为 1.

(ii) 一个定位设备向猎人反馈一个点 P_n. 这个设备唯一能够向猎人保证的

事情是, 点 P_n 和点 A_n 之间的距离至多为 1.

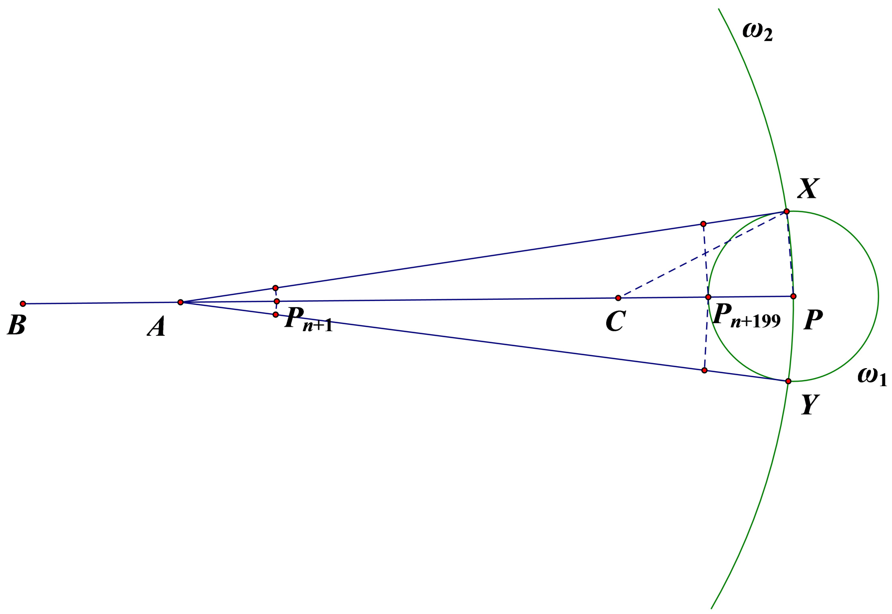
(iii) 猎人以可见的方式移动到一点 B_n, 使得点 B_n 和点 B_{n-1} 之间的距离恰为 1.

试问, 是否无论兔子如何移动, 也无论定位设备反馈了哪些点, 猎人总能够适当地选择她的移动方式, 使得在 10^9 个回合之后, 她能够确保和兔子之间的距离至多是 100?

(奥地利 供题)

解 猎人无法确保能在 10^9 个回合后与兔子的距离不超过 100.

设 $d_n = A_nB_n$. 如果对某个 $n \le 10^9$, 已有 $d_n \ge 100$, 那么之后兔子只需每次朝猎人的反方向跳跃即可. 现假设 $d_n < 100$, 我们说明兔子有适当的移动方式, 并且定位设备的反馈点对兔子"有利"时, 无论猎人采取何种移动方式, 在 200 回合之后, 猎人无法确保 $d_{n+200}^2 < d_n^2 + \frac{1}{2}$, 即总有可能 $d_{n+200}^2 \ge d_n^2 + \frac{1}{2}$.



假设第 n 回合结束后兔子在 $A = A_n$, 猎人在 $B = B_n$, 我们不妨让兔子向猎人明确 A 的位置, 这使得之前定位设备反馈的信息都可忽略. 作射线 BA (当 $B = A$ 时, 任作一条射线), 假如后 200 次定位设备反馈的点恰是沿射线方向从 A 开始每次前进距离 1, 即

$$A_nP_{n+1} = P_{n+1}P_{n+2} = \cdots = P_{n+199}P_{n+200} = 1.$$

记 $P = P_{n+200}$. 我们不妨提前将之后 200 次反馈的点都告诉猎人, 这只会增加猎人的信息. 猎人看到这 200 次反馈点会如何决定? 显然以 P 为圆心, 1 为

半径作圆 ω_1, 兔子在 ω_1 内(含边界). 以 A 为圆心, 200 为半径作圆 ω_2, 兔子也在 ω_2 内(含边界). 设 ω_1 和 ω_2 交于点 X 和 Y, 则兔子在 X 或 Y 都是可能的, 兔子沿 AX 从 A 跳向 X, 或沿 AY 从 A 跳向 Y, 每步跳跃距离等于 1, 这两种跳跃方式以及定位设备的反馈点都是合法的. 假如猎人沿 BP_{n+200} 从 B 移动到 C, $BC = 200$, 则有可能 $d_{n+200}^2 = CX^2$. 假如猎人按任意一种策略移动到某处 Z, 则 Z 在 C 的左侧. 若 Z 在 BC 上方, 则 $ZY^2 \geq CY^2$, 若 Z 在 BC 下方, 则 $ZX^2 \geq CX^2$, 总之不论猎人怎么选择他的移动方式, 都有可能 $d_{n+200}^2 \geq CX^2$.

下面来计算 CX^2. 由 Stewart 定理,

$$\begin{aligned} CX^2 &= \frac{AX^2 \cdot CP + PX^2 \cdot AC}{AP} - AC \cdot CP \\ &= \frac{200^2 \cdot d_n + 1^2(200 - d_n)}{200} - (200 - d_n)d_n \\ &= d_n^2 - \frac{d_n}{200} + 1 \geq d_n^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

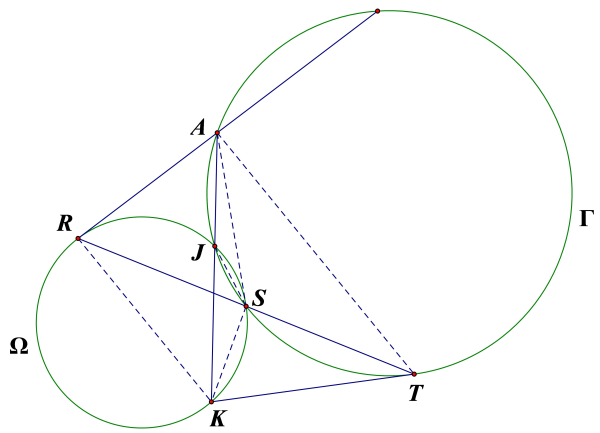
初始时 $d_0 = 0$, 故在 $n_0 = 4 \cdot 10^6 + 200 < 10^9$ 个回合后, 总有可能 $d_{n_0}^2 \geq 10^4 + \frac{1}{2}$, 即猎人无法保证 $d_{n_0} \leq 100$, 从而在 10^9 个回合后, 猎人无法确保能和兔子的距离至多是 100. □

第二天

7 月 19 日　9:00 – 13:30

4. 设 R 和 S 是圆 Ω 上互异两点, 且 RS 不是直径. 设 ℓ 是圆 Ω 在点 R 处的切线. 平面上一点 T 满足, 点 S 是线段 RT 的中点. J 是圆 Ω 的劣弧 $\overset{\frown}{RS}$ 上一点, 使得三角形 JST 的外接圆 Γ 交 ℓ 于两个不同点. 记 Γ 与 ℓ 的交点中接近 R 的那个为 A. 直线 AJ 交圆 Ω 于另一点 K. 证明, 直线 KT 和圆 Γ 相切.

(卢森堡 供题)



证明 由 R, K, S, J 共圆, S, J, A, T 共圆, 可知

$$\angle KRS = \angle KJS = \angle STA.$$

又 AR 与 Ω 相切, $\angle RKS = \angle TRA$. 于是三角形 RKS 与 TRA 相似, 从而

$$\frac{RK}{RS} = \frac{TR}{TA}.$$

由条件 S 是 RT 的中点, 因此 $RS = ST$, 于是

$$\frac{RK}{TS} = \frac{RT}{TA},$$

再结合 $\angle KRT = \angle STA$, 即得三角形 KRT 与 STA 相似, 从而 $\angle SAT = \angle STK$, 这表明直线 KT 与圆 Γ 相切. □

5. 给定整数 $N \geq 2$. $N(N+1)$ 个身高两两不同的足球队员站成一排. 球队教练希望从这些球员中移走 $N(N-1)$ 人, 使得这一排上剩下的 $2N$ 名球员满足如下 N 个条件:

(1) 他们当中身高最高的两名球员之间没有别的球员,

(2) 他们当中身高第三和第四的两名球员之间没有别的球员,

⋮

(N) 他们当中身高最矮的两名球员之间没有别的球员.

证明, 这总是可以做到的.

(俄罗斯 供题)

证明 将所有 $N(N+1)$ 个队员按身高分成 N 组, 最高的 $N+1$ 个人第 1 组, 接下来的 $N+1$ 个人第 2 组, $\cdots$, 最矮的 $N+1$ 个人第 N 组. 教练从这一排中从左往右依次观察这些队员, 直至第一次发现有两个人同组, 假设 A_1 和 A_2 同组, A_1 在 A_2 的左边, A_1 和 A_2 都在第 t_1 组, 那么教练让 A_1, A_2 留下, 让 A_2 左边的其他人都离开, 并且第 t_1 组中的其他人也都离开. A_2 右边的人都属于其余 $N-1$ 组, 每组至多有一人离开, 因此每组还至少有 N 人. 接着从 A_2 开始往右继续观察剩下的队员, 直至再次发现两人同组, 假设 A_3, A_4 同组, A_3 在 A_4 的左边, A_3 和 A_4 都在第 t_2 组, 教练让 A_3, A_4 留下, A_2 至 A_4 之间的其他人都离开, 并且第 t_2 组的其他人也都离开.

如此继续进行下去. 当已经确定了 $A_1, A_2, \cdots, A_{2k-1}, A_{2k}$ 时, 他们依次从左至右排列, A_1, A_2 在 t_1 组, A_3, A_4 在 t_2 组, $\cdots$, A_{2k-1}, A_{2k} 在 t_k 组, 并且 A_{2k} 右边的人都是剩下的 $N-k$ 组中的人, 且每组至少有 $N-k+1$ 个人. 如

果 $k \le N-1$, 从 A_{2k} 开始继续往右观察剩下的队员, 一定有两人是同一组的, 第一次发现同组的两个人记为 A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+1} 在 A_{2k+2} 的左边, 设他们是第 t_{k+1} 组的, 留下这两个人, 让 A_{2k}, A_{2k+2} 之间的其他人离开, 让第 t_{k+1} 组的其他人也都离开.

最后我们留下了 $2N$ 个人, $A_1, A_2, \cdots, A_{2N}$, 在队列中依次从左向右, 且每组都恰好留下两个人, 每组留下的两个人之间没有其他人, 因此结论成立. $\square$

6. 一个**本原格点**是一个有序整数对 (x,y), 其中 x 和 y 的最大公约数是 1. 给定一个有限的本原格点集 S, 证明, 存在一个正整数 n 和整数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 使得对于 S 中的每一个 (x,y), 都成立:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(美国 供题)

证明 对 S 的元素个数归纳. 若 $|S|=1$, 设 $S=\{(x_0,y_0)\}$. 由 Bezout 定理, 存在整数 a,b, 使得 $ax_0+by_0=1$, 取齐次整系数多项式 $P(X,Y)=aX+bY$, 则对任意 $(x,y)\in S$, 有 $P(x,y)=1$.

下面假设 $|S|=k\ge 2$, 并且结论在 $k-1$ 时成立. 任取 $(x_0,y_0)\in S$, 由 Bezout 定理, 存在整数 a,b, 使得 $ax_0+by_0=1$. 作平面上的单模整变换

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad T(X,Y)=(aX+bY,-y_0X+x_0Y),$$

T 将 $\mathbb{Z}^2$ 到 $\mathbb{Z}^2$ 作一一对应, 并且将本原格点也映到本原格点. 如果对 $T(S)$, 存在齐次整系数多项式 $P(X,Y)$, 使得对任意 $(x,y)\in T(S)$, $P(x,y)=1$, 那么齐次整系数多项式 $P(T(X,Y))=P(aX+bY,-y_0X+x_0Y)$, 就满足对任意 $(x,y)\in S$, $P(T(x,y))=1$. 我们只需对 $W=T(S)$ 来证明. 注意 $T(x_0,y_0)=(1,0)\in W$. 记 $W'=W\backslash\{(1,0)\}$. 由归纳假设, 存在齐次整系数多项式 $F(X,Y)$, 使得对任意 $(x,y)\in W'$, 都有 $F(x,y)=1$. 设 $W'=\{(x_1,y_1),\cdots,(x_{k-1},y_{k-1})\}$, 令

$$G(X,Y)=\prod_{i=1}^{k-1}(-x_iY+y_iX),$$

于是对 $1\le i\le k-1$, 都有 $G(x_i,y_i)=0$, 而 $G(1,0)=y_1y_2\cdots y_{k-1}=:a$. 设

$$F(X,Y)=a_0X^n+a_1X^{n-1}Y+\cdots+a_nY^n.$$

由于 $F(x_i,y_i)=a_0x_i^n+y_i(a_1x_i^{n-1}+\cdots+a_ny_i^{n-1})=1$, 故 $(a_0,y_i)=1$, $1\le i\le n-1$. 从而 $(a_0,a)=1$. 取正整数 d, 使得 $a_0^d\equiv 1 \pmod a$, 且 $d>\deg G$.

令 $M = \frac{a_0^d - 1}{a} \in \mathbb{Z}$, 且

$$P(X,Y) = F(X,Y)^d - MX^{d\deg F - \deg G}G(X,Y).$$

于是 $P(X,Y)$ 是 $d\deg F$ 次齐次整系数多项式. 对 $1 \leq i \leq 1$,

$$P(x_i,y_i) = F(x_i,y_i)^d - Mx_i^{d\deg F - \deg G}G(x_i,y_i) = 1 - 0 = 1,$$

而

$$P(1,0) = F(1,0)^d - MG(1,0) = a_0^d - \frac{a_0^d - 1}{a} \cdot a = 1.$$

□