2017 年新星夏令营三套联赛模拟加试题

冷岗松　叶思

2017 年上海数学新星夏令营提供了三套全国联赛模拟试题, 第一套命题人为王广廷、冷岗松; 第二、三套命题人为羊明亮、冷岗松. 这里我们介绍这三套试题中加试部分的问题和解答. 我们将用题 $x.y$ 表示第 x 套加试题的第 y 题. 特别感谢华中师大一附中的施奕成同学, 他提供了这三套试题的解并进行了难度评估. 本文部分问题的解法源于施奕成同学.

I. 试题

一、 第一套加试题

1.1 点 P, Q 位于一个平行四边形 $ABCD$ 外部, 使得 $\triangle ABP$ 和 $\triangle BCQ$ 均是等边三角形. 记过 P 且垂直于 PD 的直线为 l_1, 过 Q 且垂直于 DQ 的直线为 l_2. 证明: l_1 与 l_2 的交点位于 $\triangle ABC$ 过 B 点的高线上.

1.2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{24}$ 是整数且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} = 0$, $|a_i| \le i$, $i = 1, 2, \cdots, 24$. 求 $S = a_1 + 2a_2 + \cdots + 24a_{24}$ 的最大值.

1.3 一个正整数 n 叫做“奇怪的”, 如果存在整数 $a, b > 1$ 使得 $n = a^b + b$. 问是否存在 2014 个连续自然数使得其中恰有 2012 个奇怪数?

1.4 求具有下述性质的最大整数 r: 将每个正整数任意染上 r 种颜色之一, 则总存在两个同色的正整数 x, y 满足 $2 \le \frac{x}{y} < 8$.

二、 第二套加试题

2.1 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个公差非零的由正整数构成的等差数列, 问对任给的正整数 k $(k \ge 3)$, $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 中是否存在 k 项的等差子序列?

2.2 设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, M 是边 BC 的中点, P, Q 是以 AH 为直径的圆上的两个不同点 (且它们均不与 A 重合), 使得 M 位于直线 PQ 上, 证明:

收稿日期: 2017-07-29.

$\triangle APQ$ 的垂心位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

2.3 对每个正整数 n, 定义

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+2010)}{2010!}.$$

证明: 存在无穷多个 n 使得 a_n 是一个没有小于 2010 的素因子的整数.

2.4 设 S 是一个 $m(n+1)-1$ 元集, 将 S 的所有 n 元子集任意分成两组, 证明: 一定有一组里至少有 m 个两两不交的 n 元子集.

三、 第三套加试题

3.1 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对任意 x,y 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 且 $x^2-|x|^{\frac{1}{2}}\le f(x)\le x^2+|x|^{\frac{1}{2}}$.

3.2 求所有的正整数 a,b,c 使得 $(2^a-1)(3^b-1)=c!$.

3.3 设凸四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $AD\cap BC=\{E\}$, M,N 分别是 AD, BC 上的点使得

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC},$$

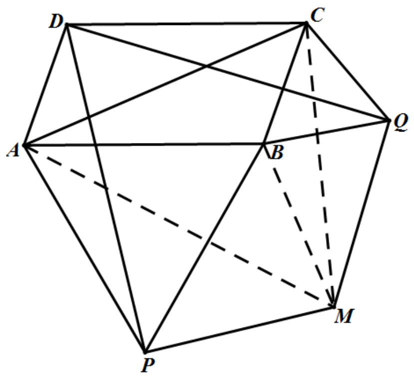
$\triangle EMN$ 的外接圆与 $\odot O$ 的两个交点为 X,Y. 证明: AB, CD, XY 三线平行或共点.

3.4 设 n 为偶数, 圆桌上事先放置好了 n 个人的名片, 而这 n 个人没有注意到这些名片, 随机坐在名片前. 证明: 总可以将圆桌进行适当旋转使得至少有两人坐在自己的名片前.

II. 解答

一、 第一套加试题

1.1 证明 (解答来自施奕成)



设 l_1 与 l_2 交于 M, 连接 MA, MB, MC. 由于

$$AP = AB = DC, \quad CQ = CB = AD.$$

$$\angle DAP = \angle DAB + 60^\circ = \angle DCB + 60^\circ = \angle DCQ,$$

故 $\triangle DAP \cong \triangle QCD$. 所以 $DP = DQ$. 又因为 $PM \perp PD$, $QM \perp QD$, 所以 $QM = MP$.

而 $\frac{AP}{\sin\angle ADP} = \frac{AD}{\sin\angle APD}$, 所以

$$\frac{AP}{\sin\angle CQD} = \frac{CQ}{\sin\angle APD}.$$

故

$$AP\sin\angle APD = CQ\sin\angle CQD.$$

要证 $MB \perp AC$, 则等价证明

$$MC^2 - MA^2 = BC^2 - BA^2.$$

注意到

$$MC^2 = CQ^2 + QM^2 - 2QM\cdot CQ\cdot\cos\angle CQM,$$

$$MA^2 = MP^2 + AP^2 - 2AP\cdot PM\cdot\cos\angle APM.$$

且

$$\begin{aligned}&2QM\cdot CQ\cdot\cos\angle CQM = 2QM\cdot CQ\cdot\cos(90^\circ+\angle CQD)\\ =&-2QM\cdot CQ\cdot\sin\angle CQD = -2PM\cdot AP\cdot\sin\angle APD\\ =&\,2PM\cdot AP\cdot\cos\angle APM.\end{aligned}$$

所以

$$MC^2 - MA^2 = CQ^2 - AP^2 = BC^2 - BA^2.$$

原题证毕. □

1.2 解 由于 $a_1, \cdots, a_{24} \in \mathbb{Z}$ 且 $|a_i| \le i$, 这样 S 的取值是有限个. 因此 S 一定存在最大值.

下面证明断言 $(*)$: 如果 S 取到最大值, 则对任何一双正整数 (m,n) $(1 \le m < n \le 24)$ 有 $a_m = -m$ 或 $a_n = n$.

事实上, 如果断言 $(*)$ 对某双 (m,n) 不是真的, 即 $a_m \ne -m$ 且 $a_n \ne n$, 则将 (a_m, a_n) 换为 $(a_m - 1, a_n + 1)$, 这时条件仍满足, 但 S 增加了 $n - m$, 这与 S 的最大性矛盾! 故 $(*)$ 得证.

由条件 $a_1 + \cdots + a_{24} = 0$ 及断言 $(*)$ 知要 S 最大, 必须存在正整数 s 和 t 使

得 $a_m=-m$, 对 $\forall\, 1\le m\le s$ 且 $a_n=n$, 对 $\forall\, t\le n\le 24$, 其中 $t=s+1,s+2$.

下分两种情况:

(1) 若 $t=s+1$, 则由条件得

$$-(1+2+\cdots+s)+((s+1)+(s+2)+\cdots+24)=0,$$

即

$$\frac{s(s+1)}{2}=150,$$

这无整数解, 矛盾!

(2) 若 $t=s+2$, 这时由 $1+2+\cdots+16=136$, $18+19+\cdots+24=147$ 知 $a_{17}=-11$. 故所求的最大值为

$$-(1^2+2^2+\cdots+16^2)+17\times(-11)+(18^2+19^2+\cdots+24^2)=1432.$$

$\square$

1.3 解法一 记集合 $\{n,n+1,\cdots,n+2013\}$ 中的奇怪数的个数为 $f(n)$, 则 $f(n+1)-f(n)\in\{-1,0,1\}$.

注意到 1, 2, 3, 4, 5 不是奇怪数, 因此 $\{1,2,\cdots,2014\}$ 中的奇怪数 <2012, 即 $f(1)<2012$.

另一方面, 令 $n_0=a^{b(b+1)(b+2)\cdots(b+2013)}$, 其中 $a,b\in\mathbb{N}^*$, $a,b>1$. 则 n_0+b, n_0+b+1, $\cdots$, $n_0+b+2013$ 是 2014 个连续的奇怪数. 即 $f(n_0+b)\ge 2014$.

由离散变量的介值定理知存在 k 使得 $f(k)=2012$, 证毕. $\square$

解法二 (解答来自施奕成) 存在. 下面来构造这些数.

取 $N=[2,3,4,\cdots,2010,2012,2013,2014]$, 因为 2011 为素数, 故 $2011\nmid N$.

考虑 2^N+1, 2^N+2, 2^N+3, $\cdots$, 2^N+2014 这 2014 个数. 下证其符合要求.

(1) 对 $i\in\{2,3,\cdots,2010,2012,2013,2014\}$, $i\mid N$. 所以 $2^N+i=(2^{\frac{N}{i}})^i+i$. 此时 $\frac{N}{i}\ge 1$, 所以 $2^{\frac{N}{i}}>1$. 又 $i>1$, 故令 $2^{\frac{N}{i}}=a$, $i=b$ 即可.

(2) 若存在 $a,b\in\mathbb{N}_+$, $a>1$, $b>1$, $a^b+b=2^N+1$. 易知 $2\mid N$.

i) 若 a 为奇数, 则由于 2^N+1 为奇数, 故 b 为偶数. 所以

$$b-1=(2^{\frac{N}{2}}-a^{\frac{b}{2}})(2^{\frac{N}{2}}+a^{\frac{b}{2}})\ge 2^{\frac{N}{2}}+a^{\frac{b}{2}}.$$

而 $a^{\frac{b}{2}}\ge 3^{\frac{b}{2}}\ge b>b-1$. 矛盾.

ii) 若 a 为偶数, 则 $2^N-a^b=b-1$.

① 若 $b\ge 2^N$, 则 $a^b+b>2^N+1$, 矛盾.

② 若 $b\le 2^N-1$, 考虑 $v_2(a^N-a^b)$ ($v_p(n)$ 指 n 中素因子 p 的幂次).

由于 $2^b\mid a^b$, 故 $v_2(2^N-a^b)\ge\min\{N,b\}$, 又 $b\le 2^N-1$, 所以 $v_2(b-1)<N$.

而 $b-1<2^b$, 所以 $v_2(b-1)<b$ 且 $b-1>0$, 矛盾. 故 2^N+1 不是奇怪数.

(3) 若存在 $a,b\in\mathbb{N}_+$, $a>1$, $b>1$, $a^b+b=2^N+2011$.

若 $b=2011$, 则 $a^{2011}=2^N$, 这与 $2011\nmid N$ 矛盾. 故 $b\neq 2011$.

i) 若 a 为奇数, 则 b 为偶数, $|a^{\frac{b}{2}}-2^{\frac{N}{2}}|(a^{\frac{b}{2}}+2^{\frac{N}{2}})=|b-2011|\geq a^{\frac{b}{2}}+2^{\frac{N}{2}}$.

① 若 $b>2011$, 则 $a^{\frac{b}{2}}+2^{\frac{N}{2}}>a^{\frac{b}{2}}\geq b-2011$, 矛盾.

② 若 $b<2011$, 则 $a^{\frac{b}{2}}+2^{\frac{N}{2}}>2^{\frac{N}{2}}>2011$, 矛盾.

ii) 若 a 为偶数, 则

① 若 $b>2011$, $2^N-a^b=b-2011$. 易知 $b-2011<2^N$.

同样有 $v_2(2^N-a^b)\geq\min\{N,b\}>b-2011$, 矛盾.

② 若 $b<2011$, 则 $v_2(2^N-a^b)\geq\min\{N,b\}$. 而 $N>2011>v_2(2011-b)$. 故有 $b\leq v_2(2011-b)\leq 10$. 又 $b\leq 10$, 所以 $b\mid N$, 所以 $a^b-(2^{\frac{N}{b}})^b=2011-b$. 而

$$\begin{aligned}a^b-(2^{\frac{N}{b}})^b&\geq(2^{\frac{N}{b}}+1)^b-(2^{\frac{N}{b}})^b\\&\geq C_b^1\cdot(2^{\frac{N}{b}})^{b-1}=b\cdot 2^{\frac{b-1}{b}N}\\&\geq b\cdot 2^{\frac{N}{2}}>2011>2011-b,\end{aligned}$$

矛盾.

综上, 2^N+2011 亦不是奇怪数.

故 2^N+1, 2^N+2, $\cdots$, 2^N+2014 中恰 2^N+1, 2^N+2011 两个不是奇怪数.□

1.4 解 所求最大正整数 $r=3$.

先证 $r=3$ 时, 将每个正整数任意染上 3 色之一, 则总存在同色的两个正整数 x,y 满足 $2\leq\frac{x}{y}\leq 8$.

若所有大于等于 2 的正整数均为同一种颜色, 则结论显然成立. 否则, 存在正整数 $t\geq 2$ 使得 t 和 $t+1$ 不同色. 考虑下面 4 个正整数, $a_0=t$, $a_1=t+1$, $a_2=2(t+1)$, $a_3=4(t+1)$, 这时易知对 $0\leq i<j\leq 3$ ($(i,j)\neq(0,1)$) 有

$$2a_i\leq a_j\leq a_3<8t\leq 8a_i,$$

即

$$2\leq\frac{a_j}{a_i}<8. \tag{$*$}$$

但 a_0,a_1,a_2,a_3 这 4 个数染了 3 种颜色, 故必有两个数同色.

不妨设 a_i,a_j 同色 ($0\leq i<j\leq 3$), 且注意到 $(i,j)\neq(0,1)$, 因此由 $(*)$ 知存在两个同色的数 a_i,a_j 满足 $2\leq\frac{a_j}{a_i}<8$.

再证可将每个正整数染上 4 色之一, 使得没有同色的两个数 x,y 满足 $2 \le \frac{x}{y} \le 8$.

将 4 种颜色记为 0, 1, 2, 3, 将正整数 n 染 i $(0 \le i \le 3)$ 色当且仅当 $[\log_2 n] \equiv i \pmod 4$. 这样的染法满足要求. 事实上, 对任意满足 $2 \le \frac{x}{y} \le 8$ 的正整数 x,y 有

$$[\log_2 x] - [\log_2 y] \le \lceil \log_2 \frac{x}{y} \rceil \le \lceil \log_2 8 \rceil = 3,$$

及

$$[\log_2 x] - [\log_2 y] \ge [\log_2 \frac{x}{y}] \ge [\log_2 2] = 1.$$

因此 $[\log_2 x] \ne [\log_2 y] \pmod 4$. 即 x 与 y 不同色.

综上所述, 满足题意的最大正整数是 $r = 3$. □

二、 第二套加试题

2.1 解 设等差数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的首项为 a_1, 公差为 d $(d \ne 0)$. 记

$$N = a_1(1+d)\cdot(1+2d)\cdot\cdots\cdot(1+(k-1)d).$$

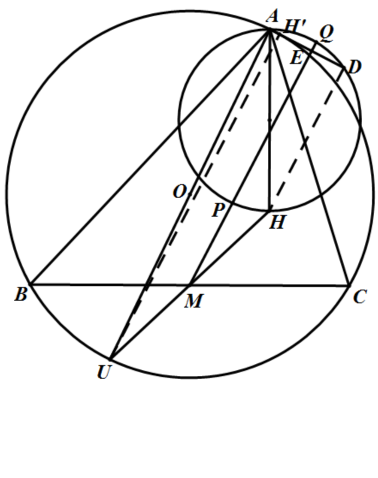
考虑 k 个数: N, $\frac{N}{1+d}$, $\frac{N}{1+2d}$, $\cdots$, $\frac{N}{1+(k-1)d}$.

因为它们都可写成 $a_1 + md$ 的形式, 其中 $m \in \mathbb{N}^*$, 故它们均是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的项. 因此 $\frac{1}{N}, \frac{1+d}{N}, \frac{1+2d}{N}, \cdots, \frac{1+(k-1)d}{N}$ 是序列 $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的项, 又易见它们成等差数列, 故为所求的 k 项的等差数列. □

2.2 证明 (解答来自施奕成) 延长 HM 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 U. 易知 AU 为 $\triangle ABC$ 外接圆直径.

设作 $AD \perp PQ$ 交以 AH 为直径的圆于 D, 交 PQ 于 E, 连 DH.

设 AD 交 AU 为直径的圆于 H', 由于 $AD \perp DH$, $AD \perp MQ$, 所以 $HD \parallel MQ$.



又 AU 为 $\triangle ABC$ 外接圆直径, 所以 $AH' \perp H'U$, 即 $AD \perp H'U$, 所以 $H'U \parallel EM \parallel DH$.

又 U, M, H 共线且 $UM = MH$, 所以 $H'E = ED$, 所以 H' 为 $\triangle APQ$ 垂心.

所以原题证毕. $\square$

2.3 证明 (解答来自施奕成) 取 $n = k \cdot (2010!)^2$ $(k \in \mathbb{N}_+)$, 则

$$a_n = \prod_{i=1}^{2010} \frac{n+i}{i} = \prod_{i=1}^{2010} \left(\frac{n}{i} + 1\right).$$

而对 $i \in \{1, 2, \cdots, 2010\}$, $2010! \mid \frac{n}{i}$ 且 $\frac{n}{i} \in \mathbb{Z}$.

故若存在素因子 $p \mid a_n$, $p < 2010$, 则存在 $j \in \{1, 2, \cdots, 2010\}$ 使 $p \mid \frac{n}{j} + 1$. 又 $2010! \mid \frac{n}{j}$ 且 $p \mid 2010!$, 所以 $p \mid 1$, 矛盾. $\square$

2.4 证明 固定 n, 对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时, 命题显然成立.

假设命题对 $m - 1$ $(m > 1)$ 成立.

把 $(n+1)m - 1$ 元集的所有 n 元子集任意分成两组, 在这两组中分别取出 n 元子集 A 和 B, 且使得 $|A \cap B|$ 最大, 则 $|A \cap B| = n - 1$.

事实上, 若 $|A \cap B| = k < n - 1$, 设 $a \in A$, $a \notin B$, $b \in B$, $b \notin A$, 记 $C = (B \cup \{a\}) \setminus \{b\}$, 则 $|C| = n$, 且 $|A \cap C| = k + 1 > k$, $|B \cap C| = n - 1 > k$, 这与 A, B 的取法使 $|A \cap B|$ 最大矛盾.

考虑 $S \setminus (A \cup B)$, 因为 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + 1$, 所以 $|S \setminus (A \cup B)| = (n+1)(m-1) - 1$, 把含 $A \cup B$ 中元素的 n 元子集去掉, 剩下的是 $S \setminus (A \cup B)$ 中的 n 元子集. 由归纳假设知, 其中必有一组, 存在至少 $(m-1)$ 个两两不交的 n 元子集, 在这组中加入 A (若 A 原来在这组中) 或 B (若 B 原来在这组中), 即得到 m 个两两不交的 n 元子集在同一组中, 故命题对 m 成立.

综上所述, 由数学归纳法知命题成立. $\square$

三、 第三套加试题

3.1 解 设 $g(x) = f(x) - x^2$, 则对任意的 x, y 均有 $g(x+y) = g(x) + g(y)$, 且 $|g(x)| \le |x|^{\frac{1}{2}}$. 因此, 对于任意的 x 和正整数 n 有

$$|g(x)| = \frac{|g(nx)|}{n} \le \sqrt{\frac{|x|}{n}}.$$

令 $n \to +\infty$, 得 $g(x) = 0$.

从而, $f(x) = x^2$. $\square$

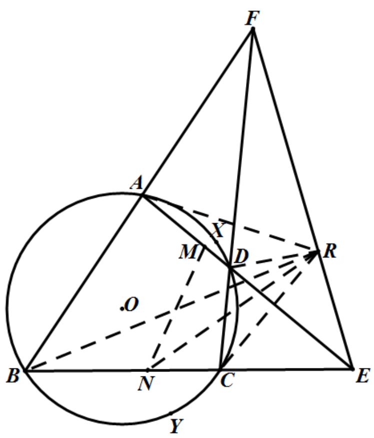
3.2 解 当 $c=1$ 时无解; 当 $c=2$ 时, $a=b=1$; 当 $c=3$ 时, $a=2, b=1$.

当 $c\geq 4$ 时, $4 \mid c!$, 因为 2^a-1 是奇数, 所以 $4 \mid 3^b-1$, 于是 b 是偶数. 设 $2^k \mid b$, 其中 k 是正整数, 下证 $2^{k+2} \mid 3^b-1$.

对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时, 设 $b=2b_1$ (其中 b_1 是奇数), 则 $3^b-1=(3^{b_1}+1)(3^{b_1}-1)$. 因为 $3^{b_1}+1\equiv 4 \pmod 8$, $3^{b_1}-1\equiv 2 \pmod 4$, 所以 $4 \mid 3^{b_1}+1$, $2 \mid 3^{b_1}-1$, 故 $8 \mid 3^b-1$. 假设 k 时成立, $k+1$ 时, 设 $b=2^{k+1}m$ (其中 m 是奇数), 则 $3^b-1=(3^{2^k m}+1)(3^{2^k m}-1)$. 由归纳假设 $2^{k+2} \mid 3^{2^k m}-1$, 又 $3^{2^k m}+1\equiv 2 \pmod 4$, 所以 $2^{k+3} \mid 3^b-1$, 即 $k+1$ 时成立.

由条件, $2^{k+2} \mid c!$, 所以 $c\leq 2k+3$, 这里因为 $c\geq 4$ 且 $2^{k+2} \mid 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k)\cdot(2k+2)$. 于是 $3^{2^k}-1\leq (2^a-1)(3^b-1)=c!\leq (2k+3)!$, 由此可知 $k\leq 3$, 从而 $c\leq 9$. 枚举知, 当 $c=4$ 时, $a=b=2$; 当 $c=5$ 时, $a=4, b=2$; 当 $c=6$ 时, 无解; 当 $c=7$ 时, $a=6, b=4$. $\square$

3.3 证明 若 $AB \parallel CD$, 则 $MN \parallel AB \parallel CD$, 所以 $XY \parallel AB \parallel CD$ (由对称性).



若 AB 与 CD 不平行, 设 $AB\cap CD=\{F\}$. 连 EF, 在 EF 上取点 R, 使 C, D, R, E 共圆. 则 $\angle DRE=\angle DCB=\angle DAF$, 所以 A, F, R, D 共圆.

因此 R 为完全四边形 $FABCED$ 的密克尔点. 从而 R, E, A, B 共圆, R, C, B, F 共圆, 故 $\angle RDC=\angle RAB$, $\angle RCD=\angle RCF=\angle RBF=\angle RBA$. 因此 $\triangle RBA\backsim\triangle RCD$, $\triangle RDA\backsim\triangle RCB$.

又 $\frac{CN}{CB}=\frac{DM}{DA}$, 得 $\frac{CN}{DM}=\frac{CB}{DA}=\frac{RC}{RD}$. 且 $\angle RDA=\angle RCB$, 所以 $\triangle RDM\backsim\triangle RCN$.

因此 $\triangle RDC\backsim\triangle RMN$, 即 $\angle RMN=\angle RDC=180^\circ-\angle REN$, 故 R, M, N, E 共圆.

设 R,M,E,N 共于圆 Γ_1, D,C,R,E 共于圆 Γ_2, A,B,C,D 共于圆 Γ. 考虑 Γ,Γ_1,Γ_2 三圆两两根轴 XY,ER,DC.

由蒙日定理 XY,ER,DC 共点, 又 $ER\cap CD=F$, 故 XY 过 F.

又 $BA\cap DC=F$, 所以 AB,CD,XY 共于点 F. 从而原题证毕. $\square$

3.4 证明 (解答来自施奕成) 将圆桌顺时针旋转距离为 $1,2,\cdots,n-1$ (不妨设 n 个人在圆桌上是等距的, 相邻两人距离为 1).

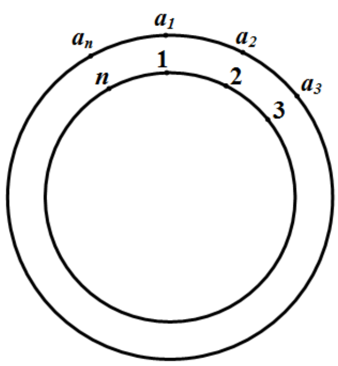
易知, 顺时针旋转距离为 $n+t$ 时相当于顺时针旋转距离为 t ($t\in\mathbb{N}$).

设初始, 顺时针旋转 $1,2,\cdots,n-1$ 这 n 个时刻分别有 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 个人坐在自己的名片前.

又由于每个人在上述 n 个时刻有且仅有一次坐在自己名片前, 所以 $x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}=n$.

反证法. 假设结论不成立. 则 $x_0=x_1=\cdots=x_{n-1}=1$ (否则存在 $x_i\geq 2$).

此时设初始时刻名片为 $1,2,\cdots,n$. 按顺时针顺序排列好, 且坐在名片为 i 的人他的名片应该为 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的排列). 则将每个 a_i 顺时针转动 $y_i=\begin{cases}a_i-i & a_i\geq i\\ n+a_i-i & a_i<i\end{cases}$ 次后此人可回到原位.



易知 $0\leq y_i\leq n-1$ 且 $y_i\neq y_j$ ($i\neq j$ 时), 这是因为若 $y_i=y_j$ 则转动 y_i 次后此两人都在正确位置上, 矛盾.

故 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 $0,1,\cdots,n-1$ 的一个排列. 所以

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\equiv 0+1+\cdots+n-1\equiv\frac{1}{2}n(n-1)\pmod n.$$

又 $y_i\equiv a_i-i\pmod n$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}i\equiv 0\pmod n.$$

故 $n\mid\frac{1}{2}n(n-1)$. 又 $n-1$ 为奇数 (由于 n 为偶数), 矛盾. $\square$