数学新星问题征解

第二十三期 (2017.08)

主持: 牟晓生

第一题. 给定正整数 $n > 1$. 考虑将 n 分拆为若干正整数 $b_1, b_2, \ldots, b_t$ 的和. 求所有分拆变化下

$$S = 2\sum_{i=1}^{t} ib_i + \sum_{i=1}^{t} b_i^2$$

的最小可能值.

(复旦附中 肖恩利 供题)

第二题. 已知 H 为锐角三角形 ABC 的垂心. D, E 分别是边 AB, AC 上的点, 满足 $AD = AE$ 且 D, H, E 共线. 延长 DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 于 K, L 两点. 过 D 作 AB 的垂线, 过 E 作 AC 的垂线, 两条垂线交于 N. 延长 HN 与圆 ω 上的 BC 弧交于 S, 而 KS, LS 分别与 BC 交于 X, Y. 证明: $\triangle SXY$ 的外接圆经过 $\triangle ABC$ 的外心.

(湖南雅礼中学学生 王子安 供题)

第三题. 设 $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ 是一个整系数的形式幂级数, 其中 $a_0 \neq 0$. 而 $F'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k \cdot x^{k-1}$ 是它的导函数. 已知 $\frac{F'(x)}{F(x)}$ 也是整系数的形式幂级数, 证明 a_0 整除每个 a_k.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第四题. 求最大的正常数 C, 使得对每个凸多边形 P 及其任意顶点 u, 都能找到 P 的另外两个顶点 v, w, 满足

$$\mathrm{area}(\triangle uvw) \geq C \cdot \mathrm{area}(P).$$

(普林斯顿大学 张瑞祥 供题)