例说“存在域”扩展

冯跃峰

所谓“存在域”, 就是指某种对象的变化范围, 它实质上就是函数定义域的拓广. 在研究某些问题时, 若我们的观察点囿于所研究对象已有的存在范围, 则常常难以发现问题的本质规律. 如果将存在域适当的拓广, 则可使一些规律趋于明显.

存在域拓广的最常见的方式, 使将原有的存在域复制, 然后按适当的方式将其拼合在一起, 使研究对象的变化更“自由” . 当发现了规律后, 再将原存在域与扩展的存在域叠合在一起, 便得到原问题的解决方案.

下面我用一个例子来说明.

例 1 (第 30 届 IMO 试题). 设 $M=\{1,2,\cdots,1989\}$, 求证: 可将 M 划分为 117 个子集 $A_i\,(i=1,2,\cdots,117)$, 使

$$|A_1|=|A_2|=\cdots|A_{117}|,\ S(A_1)=S(A_2)=\cdots=S(A_{117}).$$

这是一个早期的国际数学竞赛试题, 但很有代表性. 通过研究, 我们得到了多种解法, 最后将问题进行了推广.

【题感】从条件看, $1989=17\times117$, 每个子集中元素个数都为 17. 因为数据较大, 可先考虑简单一点的问题.

该问题的一般形式是:设 m,n 为奇数, 将 $1,2,\cdots,mn$ 排列成 $m\times n$ 的数表, 使表中各列的和都相等 (每列中的数构成一个子集).

由此研究特例, 希望发现排列的规律.

【研究特例】先考虑 $m=3$ 的情形: 将 $1,2,\cdots,3\times(2n+1)$ 排列成 $3\times(2n+1)$ 的数表, 使各列的和都相等.

【化归特例】进一步发现, 只要解决了 $m=3$ 的情形, 则 $m>3$ 的情形是轻而易举的: 后面 $m-3$ (偶数) 行利用“高斯方法”即可 (相邻两行中, 一个是递增连续自然数, 另一个是递减连续自然数).

收稿日期: 2017-07-13.

【多层次特例】对于 $m=3$ 的情形, 我们再研究其特例: 令 $n=1$, 考察 $1,2,\cdots,3\times 3$ 的排列方法.

先按自然顺序, 将 $1,2,\cdots,9$ 排成 3 行:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{array}$$

【以简驭繁】尽量调整尽可能少的数: 保持第 3 行不动 (最大的 3 个数), 只调整前两行中的数.

进一步, 为使调整简便, 我们只对同一行中的数进行调整 (每个数调整后仍在原来的行中).

【充分条件】注意到第 3 行是公差为 1 的等差数列, 所以我们只须将前两行的列和调整为公差为 1 的等差数列, 最后把 $7,8,9$ 分别放在列和为大、中、小的列中即可.

【穷举构造】先按自然顺序排好 $1,2,3$ 再考虑 4 的排法.

容易发现, 4 不能与 1 同列. 否则, 列和为 $5,7,9$ 或 $5,8,8$ 都不是连续自然数的排列.

于是, 4 的排法有 2 种可能, 我们看看哪种排法是“好”的 (便于推广).

本题非常有趣, 这两种可能都是“好”的, 由此可得到不同的构造.

(1). 先考虑第一种排法: 将 4 排在 3 的下方的情形, 则前两行排法是唯一的.

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ 5, & 6, & 4 \end{array}$$

如何将其迁移到一般情况? 我们需要发掘这一排法的规律.

从不同的角度观察将产生不同的理解, 得到不同的解法. 我们期望有什么样的规律呢? 同一行的数最好是成等差数列排列, 特别是自然数列.

- **角度 1: 存在域向左边扩展.**

考察第二行的 $5,6,4$ 其中 4 只能排在 3 的下方, 不能调整位置. 考察与 4 相邻的数 5 它被 6 隔开, 现在想象将 6 调整到其他位置, 则连续自然数 $4,5$ 呈现“跳跃式”排法: 每隔一个位置排一个数. 由此想到由 5 再向左隔一个位置排 6 这就要将“存在域”向左扩展, 于是上述排法可理解为:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 3 \\ & 6, & & 5, & & 4 \end{array}$$

【发掘特征】第一行是 $1,2,3$ 排列两次, 第二行则按如下规则排列:

从最后一个位置开始, 依次排列 $4,5,6$ 每隔一个位置排一个数 (数量特征, 逆向递增, 位置特征, 跳跃排法).

【特征迁移】再看 $n=2$ 的情形, 此时 $M=\{1,2,\cdots 15\}$.

按照上述规律，可得排法如下:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\
 & 10, & & 9, & & 8, & & 7, & & 6 \\
\hline
 & 12, & & 13, & & 9, & & 10, & & 11
\end{array}$$

此时, 每一列的和分别为 $12,13,9,10,11$ 它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列. 将左右两个表叠合成一个表得到构造如下:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\
 & 10, & & 9, & & 8, & 10 & 7, & 9 & 6 \\
\hline
\end{array}$$

规律: 第二行从最后一个位置开始, 依次排列 $6,7,8,9,10$ 每隔一个位置排一个数. 当排到第一个位置后, 再从最后一个未排数的位置排起, 直至排完所有位置. 此时, 从右向左看, 奇数位是递减的自然数列, 偶数位是递增的自然数列.

- **角度 2: 存在域向右边扩展.**

重新考察第二行的 $5,6,4$ 其中 4 只能排在 3 的下方, 不能调整位置.

考察 4 之外的两个数, 发现 $5,6$ 按自然顺序“紧凑”排列, 由此想到将 $5,6$ 同时调整到 4 的右侧, 则 $4,5,6$ 整体呈现“连续”排法, 这就要将存在域向右扩展, 于是上述排法可理解为:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1, & 2, & 3, & 1, & 2, & 3 \\
 & & 4, & 5, & 6 &
\end{array}$$

但此时的特征还不太明显, 关键是“4”的位置不好刻画, 容易误以为 4 排在第一行第一个周期的末尾位置, 其实不然, 再看一个特例.

当 $n=2$ 时，类似排列如下：

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\
 & & & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & & \\
\hline
 & & & 10, & 12, & 9, & 11, & 13, & &
\end{array}$$

此时，每一列的和分别为 $10,12,9,11,13$ 它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列.

【发掘特征】第二行第一个数 6 排在第一行第一个周期段 $(1,2,3,4,5)$ 的 "中线" 右侧的第一个位置.

如果我们不囿于每一行按连续自然数排法, 则 $n=1$ 的特例中的第一种排列方式还有另一种形式的理解.

- **角度 3: 分块观察.** 将第一种排法分为左右两块, 它可理解为:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5(\text{奇}) & 6(\text{偶}) & 4(\text{偶}) \end{array}$$

则可得到第二种构造方法.

【发掘特征】第一行是自然序列, 第二行则可分为左右两个部分 (位置特征), 其左边部分是连续的奇数, 右边部分是连续的偶数 (局部数量特征).

【特征迁移】再看 $n=2$ 的情形, 结果同样如此:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9(\text{奇}) & 7(\text{奇}) & 10(\text{偶}) & 8(\text{偶}) & 6(\text{偶}) \\ \hline 10 & 9 & 13 & 12 & 11 \end{array}$$

此时, 每一列的和分别为 $10,9,13,12,11$ 它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列.

上面 3 种理解都可迁移到一般情况, 便得到原题的解答.

解法一 (原解答) 将前 234 个自然数排成如下两行:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & 112, & 113, & 114, & 115, & 116, & 117 \\ 176, & 234, & 175, & 233, & 174, & \cdots, & 179, & 120, & 178, & 119, & 177, & 118 \end{array}$$

其中第一行是公差为 1 的等差数列, 第二行中, 奇数项和偶数项分别是公差为 -1 的等差数列.

此时, 每一列的和分别为 $177,236,178,237,\cdots,292,234,293,235$ 它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列.

现在, 适当调整各列的顺序, 使每列两个数的和从左至右构成一个公差为 1 的等差数列.

最后, 将 $235,236,\cdots,1989$ 依次排成这个数表的后 15 行, 每行 117 个数, 奇数行是从右至左排, 偶数行是从左至右排, 则以每列的数构成一个集合, 这 117 个集合合乎要求.

解法二 一般地, 对 $n=2r+1$ 类似的排法如下, 其中第二行从左至右是递增的连续自然数, 且第一个数 $2r+2$ 排在第一行 $(1,2,3,\cdots,2r+1)$ 中位于中心的数 $r+1$ 所在的列的右边一列:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & 2, & \cdots, & r+1, & r+2, & r+3, & \cdots, & 2r, & 2r+1, & 1, & 2, & \cdots, & r+1 \\
 & & & & 2r+2, & 2r+3, & \cdots, & 3r, & 3r+1, & 3r+2, & 3r+3, & \cdots, & 4r+2 \\
\hline
 & & & & 3r+4, & 3r+6, & \cdots, & 5r, & 5r+2, & 3r+3, & 3r+5, & \cdots, & 5r+3
\end{array}
$$

此时, 每一列的和分别为

$$3r+4, 3r+6, \cdots, 5r, 5r+2, 3r+3, 3r+5, 3r+7, \cdots, 5r+3$$

它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列, 同样可得到合乎条件的排法.

解法三 一般地, 对 $n=2r+1$ 前两行排列如下, 其中第二行前 r 个为递减的连续奇数, 后 $r+1$ 个为递减的连续偶数:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1, & 2, & \cdots, & r, & r+1, & r+2, & \cdots, & 2r-1, & 2r, & 2r+1 \\
4r+1, & 4r-1, & \cdots, & 2r+3, & 4r+2, & 4r, & \cdots, & 2r+6, & 2r+4, & 2r+2 \\
(& \multicolumn{2}{c}{r\text{ 个奇数}} &) & (& \multicolumn{4}{c}{r+1\text{ 个偶数}} &) \\
\hline
4r+2, & 4r+1, & \cdots, & 3r+3, & 5r+3, & 5r+2, & \cdots, & 4r+5, & 4r+4, & 2r+3
\end{array}
$$

此时, 每一列的和分别为

$$4r+2, 4r+1, 4r, \cdots, 3r+3, 5r+3, 5r+2, \cdots, 4r+5, 4r+4, 4r+3$$

它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列. 于是, 适当调整各列的顺序, 使每列两个数的和从左至右构成一个公差为 1 的等差数列. 最后, 按高斯方法, 在后面排列奇数行, 可使每列的和相等.

(2). 再考虑将 4 排在 2 的下方的情形, 则前两行排法如下:

$$
\begin{array}{ccc}
1, & 2, & 3 \\
6, & 4, & 5
\end{array}
$$

仍采用**角度 2: 存在域向右边扩展**.

考察第二行的 6, 4, 5, 其中 4 只能排在 3 的下方, 不能调整位置.

容易发现 4, 5 是按自然顺序"紧凑"排列, 由此想到将 6 调整到 4, 5 的右侧, 则 4, 5, 6 整体呈现"连续"排法, 这就要将存在域向右扩展, 于是上述排法可理解为:

$$
\begin{array}{ccc|ccc|}
1, & 2, & 3 & 1, & 2, & 3 \\
 & 4, & 5, & 6, & &
\end{array}
$$

则可得到第四种解法.

【发掘特征】两行都是自然序列, 第二行第一个数 4 排在第一行第一个周期的"中线"位置.

【特征迁移】再看 $n=2$ 的情形, 结果同样如此:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\
 & & 6, & 7, & 8, & 9, & 10 & & & \\
\hline
 & & 9, & 11, & 13, & 10, & 12 & & &
\end{array}
$$

此时, 每一列的和分别为 9, 11, 13, 10, 12 它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列.

同样, 如果跳出“自然顺序排列”的禁锢, 也可从另一角度理解上述特例的第二种排法 (分块处理).

再采用**角度 3: 分块观察**. 将第二种排法分为左右两块:

$$
\begin{array}{cc:c}
1, & 2, & 3 \\
6, & 4, & 5
\end{array}
$$

则排法可以理解为:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
6\,(\text{偶}) & 4\,(\text{偶}) & 5\,(\text{奇})
\end{array}
$$

【发掘特征】第一行是长度为 $n\ (n=3)$ 的自然序列 $(1,2,3)$, 第二行可分为左右两个部分 (位置特征), 其左边部分是连续的偶数, 右边部分是连续的奇数 (数量特征).

【特征迁移】再看 $n=2$ 的情形, 结果同样如此:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
10\,(\text{偶}) & 8\,(\text{偶}) & 6\,(\text{偶}) & 9\,(\text{奇}) & 7\,(\text{奇}) \\
\hline
11 & 10 & 9 & 13 & 12
\end{array}
$$

此时, 每一列的和分别为 11, 10, 9, 13, 12 其中左、右边部分分别是连续自然数, 合起来恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列.

上面 2 种理解都可迁移到一般情况.

解法四 一般地, 对 $n=2r+1$, 排法如下:

第一行是长度为 $n\ (n=2r+1)$ 的自然序列 $(1,2,3,\cdots,2r+1)$, 第二行是紧接着的长度为 n 的自然序列 $(2r+2,2r+3,\cdots,4r+2)$, 其中第一个数 $2r+2$ 排在第一行 $(1,2,3,...,2r+1)$ 的“中线”位置.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & 2, & \cdots, & r+1, & r+2, & \cdots, & 2r, & 2r+1, & 1, & 2, & \cdots, & r-1, & r \\
 & & & 2r+2, & 2r+3, & \cdots, & 3r+1, & 3r+2, & 3r+3, & 3r+4, & \cdots, & 4r+1, & 4r+2 \\
\hline
 & & & 3r+3, & 3r+5, & \cdots, & 5r+1, & 5r+3, & 3r+4, & 3r+6, & \cdots, & 5r, & 5r+2
\end{array}
$$

此时, 每一列的和分别为

$$3r+3, 3r+5, \cdots, 5r+1, 5r+3, 3r+4, 3r+6, \cdots, 5r, 5r+2$$

它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列, 同样可得到合乎条件的排法.

解法五 一般地, 对 $n=2r+1$ 前两行排列如下:

第一行是长度为 $n\ (n=2r+1)$ 的自然序列 $(1,2,3,\cdots,2r+1)$, 第二行前 $r+1$ 个为连续偶数, 后 r 个为连续奇数.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1, & 2, & \cdots, & r, & r+1, & r+2, & r+3, & \cdots, & 2r, & 2r+1 \\
4r+2, & 4r, & \cdots, & 2r+4, & 2r+2, & 4r+1, & 4r-1, & \cdots, & 2r+5, & 2r+3 \\
(& & r+1\text{ 个偶数} & &) & (& & r\text{ 个奇数} & &) \\
\hline
4r+3, & 4r+2, & \cdots, & 3r+4, & 3r+3, & 5r+3, & 5r+2, & \cdots, & 4r+5, & 4r+4
\end{array}$$

此时, 每一列的和分别为

$$4r+3, 4r+2, 4r+1, \cdots, 3r+4, 3r+3, 5r+3, 5r+2, \cdots, 4r+5, 4r+4$$

它恰好是公差为 1 的等差数列的一个排列, 同样可得到合乎条件的排法.

其中以解法四最简单, 解法五的“列和”最有规律, 解法一最复杂, 而命题组给出的恰恰是最复杂的一种.

利用解法四的构造方式, 很容易将该问题推广到一般情形.

例 2 (原创题). 设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 能划分为 r 个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_r$, 满足 $|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_r|$, 且 $S(A_1)=S(A_2)=\cdots=S(A_r)$, 求所有合乎要求的自然数 n 和 r.

【题感】 从目标看, 欲求的自然数 n, r 需要建立关于 n, r 的等式和不等式, 这可先由等和划分, 得到 n, r 满足的必要条件, 然后再验证该条件是充分的, 进而求出自然数 n, r.

从条件看, 划分涉及集合容量及元素和两方面的信息, 自然想到考察 $|X|$ 及 $S(X)$ 来探索相关结论.

【必要性】 考察 $|X|$ 及 $S(X)$ 得到如下两个等式:

$$n=|X|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_r|=r\,|A_1|;$$
$$\frac{n\,(n+1)}{2}=S(X)=S(A_1)+S(A_2)+\cdots+S(A_r)=r\,S(A_1).$$

由第一个等式可知, $r|n$, 再由第二个等式可知, $n\,(n+1)=2rS(A_1)$ 为偶数, 但这个估计是“无效”的, 因为 $2|n(n+1)$ 是显然的事实.

由此想到对第二个等式进行“换边”变形: 不仅 $n(n+1)$ 为偶, 而且除以 r 后, $\frac{n(n+1)}{r}$ 仍为偶. 此外, 显然有 $r<n$.

再注意到 $\frac{n}{r}$ 为整数, 从而两个结论可合并为: $\frac{n}{r}$, $n+1$ 中至少一个为偶, 且 $r<n$.

【检验】反之, 当 $\frac{n}{r}$, $n+1$ 中至少一个为偶时, 是否一定可 $r-$ 等和划分呢? 用具体数据进行检验, 发现该条件也是充分的.

我们只需将 $1,2,\cdots,n$ 排列成 n/r 行, 每行 r 个数, 使每列和相等, 然后以每列数作成一个集合即可.

【充分性】如果 n/r 为偶数, 令 $n/r=2k$. 注意 n/r 的意义: 每个子集中元素的个数, 可知按高斯方法将 $n=2kr$ 个数如下排列即可:

$$\begin{array}{cccc}
1, & 2, & \cdots, & r \\
2r & 2r-1, & \cdots, & r+1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(2k-2)r+1, & (2k-2)r+2, & ..., & (2k-1)r \\
2kr, & 2kr-1, & \cdots, & (2k-1)r+1
\end{array}$$

若 n/r 为大于 1 的奇数, 则 $n/r\geq 3$ (至少 3 行). 由“充要条件”知 $n+1$ 为偶数, 即 n 为奇数. 又 n/r 为奇数, 所以 r 为奇数, 令 $r=2k+1$.

只需前 2 行排成“列和”为连续自然数, 后偶数行按高斯方法排列即可. 前两行如下排列合乎要求:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,\ 2,\ \cdots,\ k), & k+1, & k+2, & \cdots, & 2k+1, & 1, & 2, & \cdots, & k \\
 & 2k+2, & 2k+3, & \cdots, & 3k+2, & 3k+3, & 3k+4, & \cdots, & 4k+2 \\
\hline
 & 3k+3, & 3k+5, & \cdots, & 5k+3, & 3k+4, & 3k+6, & \cdots, & 5k+2
\end{array}$$

综上所述, n, r 满足的充分必要条件是: n/r, $n+1$ 中至少一个为偶, 且 $r<n$.

如果 n/r 为偶, 令 $n/r=2s$, $r=t(s,t\in\mathbb{N}^+)$, 则 $(n,r)=(2st,t)$.

如果 n/r 为奇, 则由“充要条件”知 n,r 都为奇, 令 $n/r=2s+1$, $r=2t-1$ $(s,t\in\mathbb{N}^+)$, 则 $(n,r)=((2s+1)(2t-1),(2t-1))$.

综上所述, 一切合乎要求的自然数 n,r 为

$$(nr)=(2st,t),\ ((2s+1)(2t-1),\ (2t-1)),$$

其中 $s,t\in\mathbb{N}^+$.