# 2017 高中数学联赛加试最后两题解答思路分析

冯跃峰

今年全国高中数学联赛加试题难度适中, 本文给出难度较大的最后两题解答的思路分析.

**第 3 题**. *若将 $33\times 33$ 方格纸中每个小方格染 3 种颜色之一, 使得每种颜色的小方格个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同, 则称它们的公共边为"分隔边". 试求分隔边条数的最小值.*

**【题感】**从目标看, 本题属于计数极值问题, 自然想到常用的计数方式——分类计数: 分别计算每行每列中分隔边的条数. 但直接计数需引入较多参数, 解题较为困难, 从而想到先构造满足条件的染色, 使分隔边尽可能少, 由此猜出最小值.

为了使分隔边尽可能少, 必须同色的格尽可能相邻, 自然想到将棋盘划分为 3 块, 每块的格是单色的. 这可采用以简驭繁策略, 从均匀分块得到的"拟对象"开始, 然后改进.

**【以简驭繁】**将棋盘分割为 3 个全等的 $11\times 33$ 的棋盘 (图 1), 每一块分别染红、蓝、黄色. 此时分隔边的条数 $S=33+33=66$.

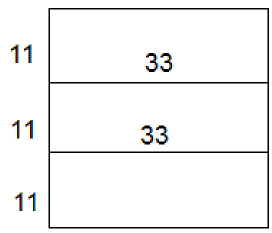


图 1

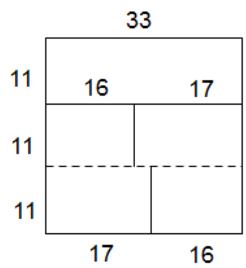


图 2

**【改进】**容易发现这不是最小的. 比如, 改变其中一条分割线的方式 (图 2), 将 $22\times 33$ 棋盘按纵向分割线分割为全等的两块 (但不是矩形), 则分隔边的条数 $S=33+11+1+11=56$.

收稿日期: 2017-09-13

我们猜想 $S=56$ 是最小的, 下证 $S\geq 56$.

**【分类计数】**按位置分类, 各分隔边分布在 33 行与 33 列中. 我们先考虑什么情况下最容易产生 $S\geq 56$.

**【充分条件分类】**一个充分条件是: 含有分隔边的行与列不少于 56. 由于行数与列数之和为 66, 从反面考虑更简单: 即单色的行与列不多于 10.

**【解决遗留】**下设单色的行与列多于 10, 设有 $p$ 个单色行, $q$ 个单色列, $p+q\geq 11$.

为了证明 $S\geq 56$, 我们需要找到若干含有 2 条分隔边的行或列.

**【充分条件】**同行或列含有 2 条分隔边的一个充分条件是: 该行或列含有 3 种颜色.

考虑最容易产生一列含 3 种颜色的情形: 棋盘含有 2 种颜色的单色行, 此时容易找到含第 3 色的列.

如果红蓝黄三色的单色行都存在, 则每列都有 2 条分隔边, $S\geq 66$, 结论成立.

如果存在红蓝色的单色行都存在, 则无黄色行. 此时 $p<33$, 否则无黄色格. 此外, 显然无单色列, 于是 $q=0$, $11\leq p<33$.

因为只有 $p$ 个单色行, 其他行与列至少一条分隔边, 得到 $66-p$ 条分隔边.

由于每列至多含有 $33-p$ 个黄格, 所以含有黄格的列不少于 $\frac{11\times 33}{(33-p)}$, 这样的列都增加一条分隔边. 所以

$$
\begin{aligned}
S &\geq (66-p)+\frac{11\times 33}{(33-p)}=33+(33-p)+\frac{11\times 33}{(33-p)} \\
&\geq 33+2\sqrt{(33-p)\cdot\frac{11\times 33}{33-p}}\geq 33+2\sqrt{225}=65,
\end{aligned}
$$

结论成立.

下设所有单色行都同色, 所有单色列都同色, 此时 $p,q\leq 11$.

**【从容易入手】**先考虑一种容易的情形: $pq=0$, 不妨设 $q=0$, 则 $p\geq 11$. 又 $p\leq 11$, 所以 $p=11$.

设单色行都为红色且在前 11 行 (否则调换一些行, 分隔边不增加), 则剩下的 $11\times 33$ 矩形只含有蓝黄 2 色.

此时, 每一列都由红色分界产生了一条分隔边, 不能再有其他的分隔边, 所以剩下的每行的一条分隔边共线, 且两侧都是单色的, 从而每行方格被平均分为两部分, 与 33 是奇数矛盾.

**【解决遗留】**再考虑遗留的情形: $pq\neq 0$, 此时, 单色行与单色列有公共格,

于是所有单色的行列都同色, 不妨设是红色. 则红色格不少于

$$33(p+q)-pq \geq 33(p+q)-\frac{(p+q)^2}{4}.$$

因为 $f(x)=33x-\frac{x^2}{4}$ 在 $[11,66]$ 上是增函数, 如果 $p+q\geq 13$, 则红色格不少于 $f(13)\geq 429-43=386>11\times 33$, 矛盾. 所以 $p+q\leq 12$.

(1) 当 $p+q=11$ 时, 非单色的行列有 55 个, 至少产生 55 条分隔边. 如果 $S=55$, 则不能有行列含有 2 条分隔边, 于是其余 $66-11=55$ 个行列都至多有 2 种颜色.

去掉所有的红色格, 则其他的 55 个行列都只含蓝黄中的一种颜色, 必有一种颜色所在的行列不多于 $[\frac{55}{2}]=27$, 设该色分布在 $s$ 行 $t$ 列, $s+t=27$, 则该色格子数不多于 $st\leq\frac{(s+t)^2}{4}<183$, 矛盾.

(2) 当 $p+q=12$ 时, 非单色的行列有 54 个, 至少产生 54 条分隔边. 如果 $S\leq 55$, 则含有 2 条分隔边的行列至多一个, 于是最多有一个行列含有 3 种颜色, 其余 $66-12-1=53$ 个行列都至多有 2 种颜色.

去掉所有的红色格, 则其他的 53 个行列都只含蓝黄中的一种颜色, 必有一种颜色所在的行列不多于 $[\frac{53}{2}]=26$, 设该色在这些行列中分布在 $s$ 行 $t$ 列, $s+t=26$, 则这些行列中该色格子数不多于 $st\leq\frac{(s+t)^2}{4}=169$. 连同含有 3 种颜色的那个行列至多含有 31 个该色格, 所以该色格不多于 $169+31=200$, 矛盾.

**【新写】**如图 2, 将棋盘分割为 3 块, 每一块分别染红、蓝、黄色. 此时分隔边的条数 $S=33+11+1+11=56$. 下证 $S\geq 56$.

如果单色的行与列不多于 10, 则含有分隔边的行与列不少于 $66-10=56$, 所以 $S\geq 56$.

下设单色的行与列多于 10, 设有 $p$ 个单色行, $q$ 个单色列, $p+q\geq 11$.

如果红蓝黄三色的单色行都存在, 则每列都有 2 条分隔边, $S\geq 66$, 结论成立.

如果存在红蓝色的单色行都存在, 则无黄色行. 此时 $p<33$, 否则无黄色格. 此外, 显然无单色列, 于是 $q=0$, $11\leq p<33$.

因为只有 $p$ 个单色行, 其他行与列至少一条分隔边, 得到 $66-p$ 条分隔边.

由于每列至多含有 $33-p$ 个黄格, 所以含有黄格的列不少于 $\frac{11\times 33}{(33-p)}$, 这样的列都增加一条分隔边. 所以

$$\begin{aligned}S&\geq(66-p)+\frac{11\times 33}{(33-p)}=33+(33-p)+\frac{11\times 33}{(33-p)}\\&\geq 33+2\sqrt{(33-p)\cdot\frac{11\times 33}{33-p}}\geq 33+2\sqrt{225}=65,\end{aligned}$$

结论成立.

下设所有单色行都同色, 所有单色列都同色, 此时 $p, q \leq 11$.

如果 $pq = 0$, 不妨设 $q = 0$, 则 $p \geq 11$. 又 $p \leq 11$, 所以 $p = 11$.

设单色行都为红色且在前 11 行 (否则调换一些行, 分隔边不增加), 则剩下的 $11 \times 33$ 矩形只含有蓝黄 2 色.

此时, 每一列都由红色分界产生了一条分隔边, 不能再有其他的分隔边, 所以剩下的每行的一条分隔边共线, 且两侧都是单色的, 从而每行方格被平均分为两部分, 与 33 是奇数矛盾.

如果 $pq \neq 0$, 此时, 单色行与单色列有公共格, 于是所有单色的行列都同色, 不妨设是红色. 则红色格不少于

$$33(p+q) - pq \geq 33(p+q) - \frac{(p+q)^2}{4}.$$

因为 $f(x) = 33x - \frac{x^2}{4}$ 在 $[11, 66]$ 上是增函数, 如果 $p + q \geq 13$, 则红色格不少于 $f(13) \geq 429 - 43 = 386 > 11 \times 33$, 矛盾. 所以 $p + q \leq 12$.

(1) 当 $p + q = 11$ 时, 非单色的行列有 55 个, 至少产生 55 条分隔边. 反设 $S \leq 55$, 则没有含 2 条分隔边的行与列, 于是其余 $66 - 11 = 55$ 个行列都至多有 2 种颜色.

去掉所有的红色格, 则其他的 55 个行列都只含蓝黄中的一种颜色, 必有一种颜色所在的行列不多于 $[\frac{55}{2}] = 27$. 设该色分布在 $s$ 行 $t$ 列, $s + t = 27$, 则该色格子数不多于 $st \leq \frac{(s+t)^2}{4} < 183$, 矛盾.

(2) 当 $p + q = 12$ 时, 非单色的行列有 54 个, 至少产生 54 条分隔边. 反设 $S \leq 55$, 则含有 2 条分隔边的行列至多一个, 于是最多有一个行列含有 3 种颜色, 其余 $66 - 12 - 1 = 53$ 个行列都至多有 2 种颜色.

去掉所有的红色格, 则其他的 53 个行列都只含蓝黄中的一种颜色, 必有一种颜色所在的行列不多于 $[\frac{53}{2}] = 26$, 设该色在这些行列中分布在 $s$ 行 $t$ 列, $s + t = 26$, 则这些行列中该色格子数不多于 $st \leq \frac{(s+t)^2}{4} = 169$. 连同含有 3 种颜色的那个行列至多含有 31 个该色格, 所以该色格不多于 $169 + 31 = 200$, 矛盾.

综上所述, 分隔边条数的最小值为 56. □

**第 4 题**. 设 $m, n$ 均是大于 1 的整数, $m \geq n$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $n$ 个不超过 $m$ 的互不相同正整数, 且 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$. 试证: 对任意实数 $x$, 均存在 $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$, 使得 $\|a_i x\| \geq \frac{2\|x\|}{m(m+1)}$, 这里 $\|y\|$ 表示实数 $y$ 到与它最近的整数的距离.

**【题感】**从目标看, 属于“在多个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中找一个数 $a_i$, 使 $\|a_i x\|$ 具有题给性质”的问题, 这通常可用整体思考: 考虑所有的 $\|a_i x\|$ $(1 \le i \le n)$, 然后构造整体函数 $W = f(\|a_1 x\|, \cdots, \|a_n x\|)$, 通过研究 $W$ 的性质找到相应的 $\|a_i x\|$.

如何构造整体函数 $W$ (常见的是和或积)? 这当然要利用题给条件, 其中最主要的条件是 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 它与整体函数密切相关.

由此想到裴蜀定理: $p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n = 1$. 所以选择整体函数为“和”的形式, 这只需在上式中凑配 $\|a_i x\|$.

**【结构联想】**因为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 由裴蜀定理, 存在常数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$.

**【构造相同】**于是, 对任意实数 $x$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i x = x$, 所以

$$\|\sum_{i=1}^{n} p_i a_i x\| = \|x\|. \tag{$*$}$$

**【瞄准目标】**我们要证明:

$$\|x\| \le \frac{[m(m+1)\|a_i x\|]}{2}. \tag{$**$}$$

为了构造 $\|a_i x\|$, 想到 $(*)$ 式左端的距离符号放入求和运算的每一项中, 这就要研究对 $u, v \in \mathbb{R}$, $\|u+v\|$ 与 $\|u\|$、$\|v\|$ 的关系. 不难发现如下的

**引理 1.** 对 $u, v \in \mathbb{R}$, $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$.

证明 因为对任何整数 $k$ 及实数 $x$, 有 $\|x+k\| = \|x\|$, 所以不妨设 $-\frac{1}{2} \le u$, $v \le \frac{1}{2}$.

又由定义 $\|-x\| = \|x\|$, 所以不妨设 $0 \le u, v \le \frac{1}{2}$, 此时与 $u$、$v$ 最近的整数都是 0, 所以 $\|u\| = u$, $\|v\| = v$.

**【充分条件分类】**如果 $0 \le u+v \le \frac{1}{2}$, 则将 $u+v$ 看作一个数, 有 $\|u+v\| = |u+v| = u+v = \|u\| + \|v\|$, 结论成立.

**【解决遗留】**如果 $u+v > \frac{1}{2}$, 由定义 (将 $u+v$ 看作一个数), $\|u+v\| \le \frac{1}{2}$, 所以 $\|u+v\| \le \frac{1}{2} < u+v = \|u\| + \|v\|$, 结论成立, 引理 1 获证.

由引理 1 可知, $\|\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\| \le \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

再结合 $\|-x\| = \|x\|$, 对任何 $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, 有 $\|kx\| \le |x| \cdot \|x\|$.

于是, 由 $(*)$ 式, 有

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} p_i a_i x\| \le \sum_{i=1}^{n} \|p_i a_i x\| \le \sum_{i=1}^{n} |p_i| \cdot \|a_i x\|.$$

注意目标式含有系数 $m$, 瞄准目标, 期望 $|p_i| \le m$, 由此想到裴蜀定理的结果可以优化: 限定 $|p_i| \le a = \max\{a_i, a_2, \cdots, a_n\} \le m \ (1 \le i \le n)$.

**引理 2.** 如果 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 则存在常数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$, 且 $|p_i| \le a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

证明 因为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 由裴蜀定理, 存在常数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$.

**【逐步调整】**如果存在 $p_i \ (1 \le i \le n)$, 使得 $|p_i| > a$, 不妨设 $|p_1| > a$, 且 $p_1 > 0$.

但 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$, 所以必存在 $p_j \ (1 \le j \le n)$, 使得 $p_j < 0$, 不妨设 $p_2 < 0$.

在等式中添加 $(-a_1a_2 + a_1a_2)$, 有

$$\begin{aligned} 1 &= p_1a_1 + (-a_1a_2 + a_1a_2) + p_2a_2 + \sum_{i=3}^{n} p_i a_i \\ &= (p_1 - a_2)a_1 + (p_2 + a_1)a_2 + \sum_{i=3}^{n} p_i a_i = \sum_{i=1}^{n} p_i' a_i, \end{aligned}$$

其中 $p_1' = p_1 - a_2$, $p_2' = p_2 + a_1$, $p_i' = p_i \ (3 \le i \le n)$.

经过一次调整, $p_1$ 至少减少 1, 至多减少 $a$, 所以调整后 $p_1$ 仍大于 0, 且 $p_2$ 增加正数 $a_1$, 其绝对值大于 $a$ 时调整后不增加, 不大于 $a$ 时调整后仍不大于 $a$.

于是, 若干次调整后必定使 $p_1$ 的绝对值不大于 $a$, 其他系数的绝对值大于 $a$ 时调整后不等, 不大于 $a$ 时调整后仍不大于 $a$.

如此下去, 可使所有系数的绝对值不大于 $a$, 引理 2 获证.

利用引理 2, 由前面的结果, 得

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |p_i| \cdot \|a_ix\| \le \sum_{i=1}^{n} a \cdot \|a_ix\| \le m \sum_{i=1}^{n} \|a_ix\|.$$

于是, 一定存在 $a_i \ (1 \le i \le n)$, 使得 $\|a_ix\| \ge \frac{\|x\|}{mn}$.

**【充分条件分类】**如果 $n \le \frac{(m+1)}{2}$, 则 $\|a_ix\| \ge \frac{\|x\|}{mn} \ge \frac{2\|x\|}{[m(m+1)]}$, 结论成立.

**【解决遗留】**如果 $n > \frac{(m+1)}{2}$, 此时 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 具有怎样的性质?

注意此时数很多, 但都在区间 $[1, m]$ 中, 数的个数多于区间长度的一半, 将出现怎样的现象?

此时 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中必定有 2 个相邻自然数, 设为 $a_2 - a_1 = 1$, 此时只需考虑小范围的整体函数 $\|a_1x\| + \|a_2x\|$ 即可!

实际上, 由引理 1, 有 $\|a_1x\| + \|a_2x\| \ge \|a_2x - a_1x\| = \|x\|$.

不妨设 $\|a_1x\| \ge \|a_2x\|$, 则 $\|a_1x\| \ge \frac{\|x\|}{2} \ge \frac{2\|x\|}{m(m+1)}$, 结论成立.

**【新写】**先证明如下两个引理.

**引理 1.** 对 $u$、$v \in \mathbb{R}$, $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$. (证明同上, 略)

由引理 1 可知, $\|\sum_{i=1}^{n} u_i\| \le \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

再结合 $\|-x\| = \|x\|$, 对任何 $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, 有 $\|kx\| \le |k| \cdot \|x\|$.

**引理 2.** 如果 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 则存在常数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使 $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$, 且 $|p_i| \le a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. (证明同上, 略)

**回到原题.** 如果 $n > \frac{(m+1)}{2}$, 但 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [1, m]$ 中, 必定有 2 个相邻自然数, 设为 $a_2 - a_1 = 1$. 由引理 1, 有 $\|a_1 x\| + \|a_2 x\| \ge \|a_2 x - a_1 x\| = \|x\|$,

不妨设 $\|a_1 x\| \ge \|a_2 x\|$, 则 $\|a_1 x\| \ge \frac{\|x\|}{2} \ge \frac{2\|x\|}{m(m+1)}$, 结论成立.

如果 $n \le \frac{(m+1)}{2}$, 因为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$, 存在常数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 使 $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = 1$, 且 $|p_i| \le a = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

于是, 对任意实数 $x$, 有 $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i x = x$, 所以结合引理 1, 有

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |p_i| \cdot \|a_i x\| \le \sum_{i=1}^{n} a \cdot \|a_i x\| \le m \sum_{i=1}^{n} \|a_i x\|.$$

因此一定存在 $a_i$ $(1 \le i \le n)$, 使得 $\|a_i x\| \ge \frac{\|x\|}{mn} \ge \frac{2\|x\|}{m(m+1)}$, 结论成立. □