数学新星网 ※ 教师专栏
www.nsmath.cn/jszl

最小解在一类整数问题中的应用

曾卫国

(湖南省雅礼中学, 410007)

在某些与正整数解相关的问题中, 会存在无穷多组解的情况, 这个时候, 如果考虑所有解, 对解决实际问题没有太大的帮助. 由于是正整数解, 所以一定有一组最小的解. 此时, 这组最小的解往往成为解题的利刃.

本文将给出几道例题, 均是比较难的题目. 但是利用最小解, 精细地处理一下, 用初中的知识就能解决.

例 1. (Pell 方程) 已知 d 是非完全平方数的正整数, 且方程 $x^2-dy^2=1$ 有一组正整数组 (x_0,y_0) 使得 $x_0+\sqrt{d}y_0$ 最小. 证明: $x^2-dy^2=1$ 的任意一组正整数解 (x,y), 均存在正整数 n, 使得 $x+\sqrt{d}y=(x_0+\sqrt{d}y_0)^n$, $x-\sqrt{d}y=(x_0-\sqrt{d}y_0)^n$.

证明 对于 $x^2-dy^2=1$ 的任意一组正整数解 (x,y), 存在正整数 n, 使得

$$(x_0+\sqrt{d}y_0)^n\le x+\sqrt{d}y<(x_0+\sqrt{d}y_0)^{n+1}.$$

令

$$x'+\sqrt{d}y'=(x+\sqrt{d}y)/(x_0+\sqrt{d}y_0)^n=(x+\sqrt{d}y)(x_0-\sqrt{d}y_0)^n,$$
$$x'-\sqrt{d}y'=(x-\sqrt{d}y)/(x_0-\sqrt{d}y_0)^n=(x-\sqrt{d}y)(x_0+\sqrt{d}y_0)^n,$$

得

$$x'=\frac{(x+\sqrt{d}y)(x_0-\sqrt{d}y_0)^n+(x-\sqrt{d}y)(x_0+\sqrt{d}y_0)^n}{2},$$
$$y'=\frac{(x+\sqrt{d}y)(x_0-\sqrt{d}y_0)^n-(x-\sqrt{d}y)(x_0+\sqrt{d}y_0)^n}{2\sqrt{d}}.$$

易知 $x'^2-dy'^2=1$, 且 x' 是正整数, y' 为整数,

$$1\le x'+\sqrt{d}y'<x_0+\sqrt{d}y_0.$$

所以得到 $x'-\sqrt{d}y'\le 1$, 所以 $y'\ge 0$. 由 $x_0+\sqrt{d}y_0$ 的最小性知 y' 不能大于 0.

收稿日期: 2017-04-07; 修订日期: 2017-09-28.

所以 $y'=0$, $x'=1$.

即 $x+\sqrt{d}y=(x_0+\sqrt{d}y_0)^n$, $x-\sqrt{d}y=(x_0-\sqrt{d}y_0)^n$. 证毕. $\square$

例 2. (第 29 届 IMO 试题) 已知 $x, y, \frac{x^2+y^2}{xy+1}$ 均为正整数. 证明: $\frac{x^2+y^2}{xy+1}$ 一定是完全平方数.

证明 设 $\frac{x^2+y^2}{xy+1}=n$ 是正整数. 从而关于 x, y 的方程

$$x^2+y^2-nxy-n=0,$$

有正整数解 (x,y), 设 (x_0,y_0) 是所有符合条件的 (x,y) 中满足 x_0+y_0 最小的解, 不失一般性, 设 $x_0\le y_0$. 我们接下来证明 $n=x_0^2$.

事实上, 关于 y 的方程

$$y^2-nx_0y+x_0^2-n=0, \tag{$*$}$$

有根 $y=y_0$, 由韦达定理另一根 $y'=nx_0-y_0$ 也是整数, 并且

$$y'=\frac{x_0^2-n}{y_0}<\frac{x_0^2}{y_0}\le y_0,$$

由 x_0+y_0 的最小性知 y' 一定不是正整数, 所以 $y'\le 0$, 从而 $x_0^2-n\le 0$.

注意到 $(*)$ 的判别式

$$\triangle=(nx_0)^2-4(x_0^2-n)=m^2,$$

m 是非负整数, 因为

$$(nx_0+2)^2-m^2=4(1+nx_0+x_0^2-n)>0,$$

所以

$$(nx_0)^2\le m^2<(nx_0+2)^2,\ \ nx_0\le m<nx_0+2.$$

显然 m 与 nx_0 同奇偶, 所以 $m=nx_0$, 于是 $n=x_0^2$. 证毕. $\square$

注 利用同样的处理方式, 读者可以尝试解决下述题目:

(1). 求所有的正整数 n, 使得存在正整数 x, y, 满足 $\frac{x^2+y^2}{xy-1}=n$;

答案为 $n=5$.

(2). 求所有的正整数 n, 使得存在正整数 x, y, 满足 $\frac{x^2+y^2}{xy-2}=n$;

答案为 $n=4$ 和 10.

(3). 一般地: 求所有的正整数 n, 使得存在正整数 x, y. 满足 $\frac{x^2+y^2}{xy+k}=n$, 其中 k 为给定的整数.

例 3. 求所有正整数 n, 使得存在正整数 x, y, z 满足 $\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=n$.

解 n 能够取到的值为 1,2,3,4,5,6,8,9.

首先, 注意到假如 $\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=n$, 分别用 kx, ky, kz (k 是正整数) 取代 x, y, z. 则 $\frac{(kx+ky+kz)}{k^3xyz}=\frac{n}{k}$, 此式说明, 如果 n 可以取到, 则 n 的所有因子也能取到.

$(x,y,z)=(1,1,1)$ 时, $n=9$, 说明 n 可以取到 1,3,9;

$(x,y,z)=(1,2,3)$ 时, $n=6$;

$(x,y,z)=(1,4,5)$ 时, $n=5$;

$(x,y,z)=(1,1,2)$ 时, $n=8$; n 还可以取到 2,4. 所以 n 一定能够取到的值有 1,2,3,4,5,6,8,9.

其次, 我们来证明 $n=7$ 或者 $n\geq 10$ 时, 不存在 x,y,z 满足 $\frac{(x+y+z)^2}{xyz}=n$.

假设存在 x,y,z 符合. 固定 n, 则关于 x,y,z 的方程

$$(x+y+z)^2=nxyz,$$

一定有正整数解 (x,y,z). 假设 (x_0,y_0,z_0) 是满足 $x_0+y_0+z_0$ 最小的一组, 不妨设 $x_0\leq y_0\leq z_0$. 接下来证明 $z_0\leq x_0+y_0$.

事实上, 考虑关于 z 的方程 $(x_0+y_0+z)^2=nx_0y_0z$, 即

$$z^2+(2(x_0+y_0)-nx_0y_0)+(x_0+y_0)^2, \tag{$*$}$$

一定有根 $z=z_0$, 由韦达定理, 另一根 $z'=nx_0y_0-2(x_0+y_0)$ 显然是整数, 且 $z'=\frac{(x_0+y_0)^2}{z_0}$ 是正整数.

从而 (x_0,y_0,z') 也是符合 $(x+y+z)^2=nxyz$ 的一组正整数解, 由 $x_0+y_0+z_0$ 的最小性, 知 $z'=\frac{(x_0+y_0)^2}{z_0}\geq z_0$, 所以 $z_0\leq x_0+y_0$. 于是

$$\begin{aligned}
7\leq n&=\frac{(x_0+y_0+z_0)^2}{x_0y_0z_0}\\
&=\frac{1}{x_0y_0}\left(\frac{(x_0+y_0)^2}{z_0}+2(x_0+y_0)+z_0\right)\\
&\leq\frac{1}{x_0y_0}(2(x_0+y_0)+2(x_0+y_0)+(x_0+y_0))\\
&\leq\frac{10}{x_0}.
\end{aligned}$$

而

$$x_0\leq y_0\leq z_0\leq x_0+y_0,$$

所以 $x_0=1$, $z_0\leq 1+y_0$, $z_0=y_0$ 或者 $1+y_0$.

当 $z_0=y_0$ 时, $n=\frac{(1+2y_0)^2}{y_0^2}=(\frac{1}{y_0}+2)^2$ 是正整数, 所以 $y_0=1$, 此时 $n=9$.

当 $z_0=y_0+1$ 时, $n=\frac{4(1+y_0)}{y_0}=4+\frac{4}{y_0}$, $y_0=1,2,4$, $n=5,6,8$, 也不等于 7.

综上: $n=1,2,3,4,5,6,8,9$. $\square$

例 4. n 是给定大于 1 的正整数, 求最大的正整数 k, 使得存在正整数 $x_1,\cdots,x_n$, 满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=kx_1\cdots x_n$.

解 k 的最大值为 n.

显然 $x_1,\cdots,x_n$ 均取 1 时, $k=n$.

当 $n=2$ 时, 设 $(x_1,x_2)=d$, $x_1=ad$, $x_2=bd$, $(a,b)=1$, 进而得到 $a=b=1$. 所以 $k=2$.

接下来证明 $k>n>2$ 时, $x_1^2+\cdots+x_n^2=kx_1\cdots x_n$ 无正整数解.

事实上, 固定 k, 假如 $x_1^2+\cdots+x_n^2=kx_1\cdots x_n$ 有正整数解 $(x_1,\cdots,x_n)$, 那么在所有的解中, 一定有一组 $(y_1,\cdots,y_n)$, 使得 $y_1+\cdots+y_n$ 最小.

不妨设 $y_1\geq\cdots\geq y_n$. 考虑关于 y 的方程

$$y^2-kyy_2\cdots y_n+y_2^2+\cdots+y_n^2=0,$$

一定有解 $y=y_1$. 由韦达定理另外一个根 y' 满足

$$y'=ky_2\cdots y_n-y_1,\ \ y'=\frac{y_2^2+\cdots+y_n^2}{y_1}>0.$$

所以 y' 也是正整数, 由于 $y_1+\cdots+y_n$ 的最小性, 知

$$y'=\frac{y_2^2+\cdots+y_n^2}{y_1}\geq y_1,$$

于是

$$y_1^2\leq y_2^2+\cdots+y_n^2\leq(n-1)y_2^2,$$

从而

$$ny_1y_2\cdots y_n<ky_1y_2\cdots y_n=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\leq 2(n-1)y_2^2<2ny_2^2.$$

因为 $n>2$, 则 $y_3\cdots y_n<2$, 说明 $y_3=\cdots=y_n=1$, 从而

$$y^2-kyy_2+y_2^2+n-2=0.$$

当 $y=y_2$ 时, 有 $k=2+\frac{n-2}{y^2}\leq n$, 与 $k>n$ 矛盾.

当 $y\neq y_2$ 时, 因为 $y_1\geq y_2$, 所以 $y_1>y_2$, 进而

$$(y_2+1)^2\leq y_1^2\leq y_2^2+n-2.$$

所以 $n\geq 2y_2+3$. 方程 $y^2-kyy_2+y_2^2+n-2=0$ 的判别式为 $(ky_2)^2-4(y_2^2+n-2)=m^2$ 是完全平方数, 且 $m<ky_2$, 且 m 与 ky_2 同奇偶, 所以

$$(ky_2)^2-4(y_2^2+n-2)=m^2\leq(ky_2-2)^2.$$

从而 $ny_2<ky_2\leq y_2^2+n-1$, 因此 $n(y_2-1)<(y_2-1)(y_2+1)$, 进而有 $n<y_2+1$, 且 $y_2\neq 1$, 与 $n\geq 2y_2+3$ 矛盾.

综上, k 的最大值为 n. $\square$

注 读者可以尝试解决下面问题: 已知 k 是给定大于 3 的正整数, 求最小的 n $(n>k)$, 使得存在正整数 $x_1,\cdots,x_n$, 满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=kx_1\cdots x_n$.

例 5. (第 48 届 IMO 试题) m,n 是正整数, 证明: 如果 $4mn-1\mid(4m^2-1)^2$, 则 $m=n$.

证明 因为 $4mn-1\mid(4m^2-1)^2$, 所以 $4mn-1\mid(16(mn)^2-4m^2)^2$. 于是 $4mn-1\mid(4n^2-1)^2$.

所以 $(4mn-1)^2\mid(4n^2-1)^2(4m^2-1)^2$, 从而 $4mn-1\mid(4n^2-1)(4m^2-1)$. 即 $4mn-1\mid(4nm-1)^2-4(m-n)^2$, $4mn-1\mid 4(m-n)^2$, 所以 $4mn-1\mid(m-n)^2$.

设 $(m-n)^2=k(4mn-1)$, 当 $k=0$ 时, 结论已经成立. 接下来证明 $k>0$ 时不可能. 用反证法.

对于固定的正整数 k, 假如存在正整数组 (m,n), 使得 $(m-n)^2=k(4mn-1)$. 设 (m_0,n_0) 是其中满足 m_0+n_0 最小的一组. 不妨设 $m_0<n_0$.

于是考虑关于 n 的方程 $(m_0-n)^2=k(4m_0n-1)$, 即

$$n^2-(4k+2)m_0n+m_0^2+k=0,$$

有一个正整数根 $n=n_0$, 另一个根 $n'=(4k+2)m_0-n_0$ 是整数, $n'=\frac{m_0^2+k}{n_0}>0$, 所以 (m_0,n') 也是符合的一组正整数根. 由 m_0+n_0 最小知 $n'=\frac{m_0^2+k}{n_0}\geq n_0$, 所以 $k\geq n_0^2-m_0^2\geq 2m_0+1$, 而方程 $n^2-(4k+2)m_0n+m_0^2+k=0$ 的判别式

$$\Delta=4(2k+1)^2m_0^2-4(m_0^2+k),$$

是完全平方, 所以 $(2k+1)^2m_0^2-(m_0^2+k)$ 是完全平方, 且小于 $(2k+1)^2m_0^2$, 所以

$$(2k+1)^2m_0^2-(m_0^2+k)\leq((2k+1)m_0-1)^2,$$

从而得到

$$(m_0-1)^2\geq k(4m_0-1)\geq(4m_0-1)(2m_0+1).$$

整理得到 $7m_0^2+4m_0-2\leq 0$, 这与 m_0 是正整数矛盾.

所以假设不成立, 即 k 只能是 0, 从而 $m=n$. $\square$