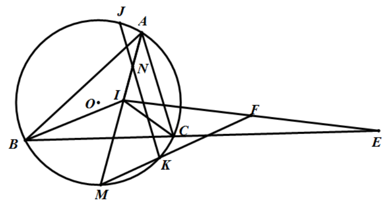
数学新星问题征解

第二十四期（2017.11）

主持: 牟晓生

第一题. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, I 是内心, AI 交外接圆 $\odot O$ 于另一点 M. $\angle BIC$ 的外角平分线交 BC 的延长线于 E, 点 F, N 分别是 IE, IA 的中点. MF 交 $\odot O$ 于另一点 K, KN 交 $\odot O$ 于另一点 J. 证明: 过 J 的直径平行于 AI.

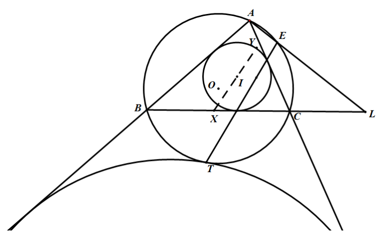


(浙江桐乡高级中学学生 顾文灏 供题)

第二题. 给定正整数 $n \geq 2$. 已知非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的和为 1, 求 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的最大值与最小值.

(东北育才学校 张雷 供题)

第三题. 已知 $\triangle ABC$ 内接于圆 O, D 为内切圆 $\odot I$ 与 BC 的切点, T 为 A–伪旁切圆切点. (*) 直线 TD 与圆 O 交于另一点 E, 直线 AE 与 BC 的延长线交于 L. X 在 BC 边上, 满足 $XC = LC$. Y 为 BL 的中垂线与 XI 的交点. 证明: $\frac{XI}{YI} = \frac{2(p-c)}{p-b}$, 其中 p 是 $\triangle ABC$ 的半周长.



(上海复旦附中青浦分校学生 林扬渊 供题)

第四题. 证明: 不存在正整数 a, b, c, 使得 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 为奇数.

(北京人大附中学生 杨舍 供题)

(*) T 在圆 O 上, 且过 T 的一个圆与 AB, AC 的延长线及圆 O 相切.