全国高中数学联赛加试中两道试题对比研究

冯跃峰

今年全国高中数学联赛加试中有一道“分段递归数列”问题. 无独有偶, 2013 年全国高中数学联赛加试中也有一道“分段递归数列”问题, 而且其解法虽有差别, 但其思考方法几乎是一致的: 都是通过研究子列的通式证明有关结论. 所不同的是, 今年的试题需要研究多个子列, 2013 年的试题只需研究一个子列.

下面给出两道试题解答的思路分析.

试题 1. 设数列 $\{a_n\}$ 定义为: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n$ (若 $a_n\le n$), 或 $a_{n+1}=a_n-n$ (若 $a_n>n$). 试求满足 $a_r<r\le 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

(2017 年全国高中数学联赛加试题)

【题感】从目标看, 我们需要在给定区间 $[1,3^{2017}]$ 中找到满足 $a_r<r$ 的正整数 r 的个数, 自然想到从初值开始, 一个个考察.

但仅考察满足 $a_r<r$ 的正整数 r 构成的子列, 并没有明显的规律, 我们可扩大观察范围: 分别考察满足 $a_r<r$, $a_r>r$, $a_r=r$ 的正整数 r (称这些 r 分别为弱数, 强数, 平数) 构成的子列, 则不难发现规律.

【研究特例】数列 $\{a_n\}$ 的前面若干项的取值如下表所示:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	⋯
a_n	1	2	4	1	5	10	4	11	3	12	2	13	1	14	⋯

虽然所有弱数 r 没有明显规律, 但若同时考察几个子列: 在所有弱数、强数、平数对应位置都记上“<”、“>”、“=”时, 规律却非常明显—介于相邻两个“平数”之间的数, 弱数与强数交替出现 (各占一半).

(如果上述猜想正确, 则可直接得到答案: 所求的个数 $S=[\frac{(3^{2017}-x)}{2}]$, 其中 x 为区间 $[1,3^{2017}]$ 中“平数”的个数.)

【从简单入手】先考虑哪些 r 为平数.

收稿日期: 2017-09-26.

观察上表, 发现平数 r 构成的子列 $\{f(k)\}$ 为: $1,2,5,14,\cdots$, 其中 $a_{f(k)}=f(k)$.

【归纳通式】(序号表示, 同构表示) $5=f(3)=?$

注意到区间 $[1,3^{2017}]$ 的端点为 3 的幂, 它提示我们应用 3 的幂来归纳, 于是

$$5=f(3)=3^1+2=3^1+3^0+3^0,$$

$$14=f(4)=3^2+3^1+3^0+3^0.$$

猜想: $f(k)=3^{k-2}+3^{k-3}+\cdots+3^1+3^0+3^0=\frac{(3^{k-1}+1)}{2}$.

用数学归纳法还难以证明上述猜想, 由于原来的递归关系是一阶的, $a_{f(k+1)}$ 无法利用归纳假设 $a_{f(k)}$ 来计算 ($a_{f(k+1)}$ 只能转化为 $a_{f(k+1)-1}$).

所以, 我们还需要发掘 $a_{f(k)}$ 与 $a_{f(k+1)}$ 之间的项的取值规律.

将介于 $a_{f(k)}$ 与 $a_{f(k+1)}$ 之间的项的取值都用含 $a_{f(k)}$ 的数表示, 则数列前面若干项可以改造如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	···
a_n	1	2	2+2	2-1	5	5+5	5-1	5+6	5-2	5+7	5-3	5+8	5-4	14	···

注意介于 $\frac{(3^k+1)}{2}$、$\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$ 之间的数可以表示为 $f(k)+2s-1$ 或 $p=f(k)+2s$ $(1\le s\le\frac{(3^k-1)}{2})$, 其中 $f(k)=\frac{(3^k+1)}{2}$, 由此发现以下结论:

令 $f(k)=\frac{(3^k+1)}{2}$, 则对所有 $1\le s\le\frac{(3^k-1)}{2}$, 有

$$a_{f(k)+2s-1}=a_{f(k)}+a_{f(k)}+s-1=2a_{f(k)}+s-1,$$

$$a_{f(k)+2s}=a_{f(k)}-s.$$

注意到 $\frac{(3^k-1)}{2}=f(k)-1$, 记 $n=f(k)=\frac{(3^k+1)}{2}$, 则上述结论可整理为:

命题 1. 若 n 为平数, 则对 $1\le s\le n-1$, 有 $a_{n+2s-1}=2n+s-1$, $a_{n+2s}=n-s$.

命题 2. 所有平数 $n=\frac{(3^k+1)}{2}$ $(k\in\mathbb{N})$.

命题 1 的证明 对 s 归纳.

当 $s=1$ 时, 因为 n 为平数, 所以 $a_n=n$. 由递归关系, 有

$$a_{n+1}=a_n+n=2n=2n+s-1>n+1,$$

$$a_{n+2}=a_{n+1}-(n+1)=2n-n-1=n-1=n-s,$$

结论成立.

设结论对 $s=m$ $(1\le m\le n-2)$ 成立, 即

$$a_{n+2m-1}=2n+m-1,\quad a_{n+2m}=n-m.$$

考虑 $s=m+1$ 的情形. 因为 $a_{n+2m}=n-m<n+2m$, 由递归关系, 有

$$\begin{aligned} a_{n+2m+1} &= a_{n+2m}+(n+2m) \\ &= (n-m)+(n+2m)=2n+m \\ &= 2n+(m+1)-1. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} 2n+m-(n+2m+1) &= n-m-1 \\ &\geq n-(n-2)-1 \\ &= 1>0, \end{aligned}$$

所以 $n+2m+1$ 为强数. 进而由递归关系, 有

$$\begin{aligned} a_{n+2m+2} &= a_{n+2m+1}-(n+2m+1) \\ &= (2n+m)-(n+2m+1) \\ &= n-(m+1). \end{aligned}$$

所以结论对 $s=m+1$ 成立, 命题 1 获证. □

命题 2 的证明 首先, $1=\frac{(3^0+1)}{2}$ 为平数.

其次, 我们对正整数 k 归纳证明: 区间 $I_k=(\frac{(3^{k-1}+1)}{2},\frac{(3^k+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^k+1)}{2}$ 为平数.

当 $k=1$ 时, $I_1=(1,2]$, 其中只有 $2=\frac{(3^1+1)}{2}$ 为平数, 结论成立.

设结论对 k 成立, 即 $I_k=(\frac{(3^{k-1}+1)}{2},\frac{(3^k+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^k+1)}{2}$ 为平数, 考虑 $k+1$ 的情形.

令 $n=\frac{(3^k+1)}{2}$, 由归纳假设, $a_n=n$. 于是, 由命题 1, 对所有自然数 $s\leq n-1$, 有 $a_{n+2s-1}=2n+s-1>n+2s-1$, $n+2s-1$ 为强数; $a_{n+2s}=n-s<n+2s$, $n+2s$ 为弱数.

特别地, 取 $s=n-1$ 代入 $a_{n+2s}=n-s$, 得 $a_{3n-2}=1$, $3n-2$ 为弱数.

进而由递归关系, 有 $a_{3n-1}=a_{3n-2}+(3n-2)=1+(3n-2)=3n-1$, $3n-1$ 为平数.

所以, 区间 $(n,3n-1]$ 中只有 $3n-1$ 为平数.

注意 $3n-1=3\cdot\frac{(3^k+1)}{2}-1=\frac{(3^{k1}+1)}{2}$, 故区间 $I_{k+1}=(\frac{(3^k+1)}{2},\frac{(3^{k+1}+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$ 为平数, 命题 2 获证. □

【解答原题】注意到 $\frac{(3^k+1)}{2}$ 与 $\frac{(3^{k-1}+1)}{2}$ 之间有 $\frac{(3^k+1)}{2}-\frac{(3^{k-1}+1)}{2}-1=3^{k-1}-1$ (偶数) 个数, 由命题 1、2 可知, 其中强数弱数交替出现, 恰好有一半为弱数.

【整体把握】在区间 $[1,3^{2017}]$ 中, 去掉 2018 个平数 $r=\frac{(3^k+1)}{2}$, $(k=0,1,2,\cdots,2017)$, 将余下的数排成递增序列, 则强数弱数在序列中也交替出现, 且排在奇号位上的为强数, 排在偶号位上的为弱数.

故所求的弱数个数: $S=[\frac{(3^{2017}-2018)}{2}]=\frac{(3^{2017}-2019)}{2}$.

【新写】先证明两个命题.

命题 1. 若 n 为平数, 则对 $1\le s\le n-1$, 有 $a_{n+2s-1}=2n+s-1$, $a_{n+2s}=n-s$.

证明 对 s 归纳. 当 $s=1$ 时, 因为 n 为平数, 所以 $a_n=n$. 由递归关系, 有

$$a_{n+1}=a_n+n=2n=2n+s-1>n+1,$$

$$a_{n+2}=a_{n+1}-(n+1)=2n-n-1=n-1=n-s,$$

结论成立.

设结论对 $s=m\,(1\le m\le n-2)$ 成立, 即

$$a_{n+2m-1}=2n+m-1,\quad a_{n+2m}=n-m.$$

考虑 $s=m+1$ 的情形. 因为 $a_{n+2m}=n-m<n+2m$, 由递归关系, 有

$$\begin{aligned}a_{n+2m+1}&=a_{n+2m}+(n+2m)\\&=(n-m)+(n+2m)=2n+m\\&=2n+(m+1)-1.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}2n+m-(n+2m+1)&=n-m-1\\&\ge n-(n-2)-1\\&=1>0,\end{aligned}$$

所以 $n+2m+1$ 为强数. 进而由递归关系, 有

$$\begin{aligned}a_{n+2m+2}&=a_{n+2m+1}-(n+2m+1)\\&=(2n+m)-(n+2m+1)\\&=n-(m+1).\end{aligned}$$

所以结论对 $s=m+1$ 成立, 命题 1 获证.

命题 2. 所有平数 $n=\frac{(3^k+1)}{2}$ $(k\in\mathbb{N})$.

证明 首先, $1=\frac{(3^0+1)}{2}$ 为平数.

其次, 我们对正整数 k 归纳证明: 区间 $I_k=(\frac{(3^{k-1}+1)}{2},\frac{(3^k+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^k+1)}{2}$

为平数.

当 $k=1$ 时, $I_1=(1,2]$, 其中只有 $2=\frac{(3^1+1)}{2}$ 为平数, 结论成立.

设结论对 k 成立, 即 $I_k=(\frac{(3^{k-1}+1)}{2},\frac{(3^k+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^k+1)}{2}$ 为平数, 考虑 $k+1$ 的情形, 令 $n=\frac{(3^k+1)}{2}$.

由归纳假设, $a_n=n$. 于是, 由命题 1, 对所有自然数 $s\le n-1$, 有 $a_{n+2s-1}=2n+s-1>n+2s-1$, $n+2s-1$ 为强数; $a_{n+2s}=n-s<n+2s$, $n+2s$ 为弱数.

特别地, 取 $s=n-1$ 代入 $a_{n+2s}=n-s$, 得 $a_{3n-2}=1$, $3n-2$ 为弱数.

进而由递归关系, 有 $a_{3n-1}=a_{3n-2}+(3n-2)=1+(3n-2)=3n-1$, $3n-1$ 为平数.

所以, 区间 $(n,3n-1]$ 中只有 $3n-1$ 为平数.

注意 $3n-1=3\cdot\frac{(3^k+1)}{2}-1=\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$, 故区间 $I_{k+1}=(\frac{(3^k+1)}{2},\frac{(3^{k+1}+1)}{2}]$ 中只有 $\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$ 为平数, 命题 2 获证.

回到原题. 注意到 $\frac{(3^k+1)}{2}$ 与 $\frac{(3^{k-1}+1)}{2}$ 之间有偶数个数,由命题 1、2 可知, 在区间 $[1,3^{2017}]$ 中, 去掉 2018 个平数 $r=\frac{(3^k+1)}{2}$ $(k=0,1,2,\cdots,2017)$, 将余下的数排成递增序列, 则强数弱数在序列中也交替出现, 且第一个数为强数.

故所求的弱数个数: $S=[\frac{(3^{2017}-2018)}{2}]=\frac{(3^{2017}-2019)}{2}$. □

注 如果将 3^{2017} 改为给定的正整数 N, 则区间 $[1,N]$ 中平数个数 x 的计算稍困难些. 其结果又是多少?

此时, 设 $\frac{(3^k+1)}{2}\le N<\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$ $(k\in\mathbb{N})$, 则区间 $[1,N]$ 中的所有平数为 $\frac{(3^t+1)}{2}$ $(0\le t\le k)$, 共有 $k+1$ 个. 需要将 k 用 N 表示.

由 $\frac{(3^k+1)}{2}\le N<\frac{(3^{k+1}+1)}{2}$, 得 $3^k\le 2N-1<3^{k+1}$, 所以

$$k\le\log_3(2N-1)<k+1,$$

所以 $[\log_3(2N-1)]=k$, 于是 $x=[\log_3(2N-1)]+1$.

此时, 区间 $[1,N]$ 中弱数个数

$$S=\left[\frac{(N-x)}{2}\right]=\left[\frac{(N-[\log_3(2N-1)]-1)}{2}\right].$$

特别地, 取 $N=3^{2017}$, 则 $\log_3(2N-1)=\log_3(2\cdot 3^{2017}-1)$.

因为 $3^{2017}<2\cdot 3^{2017}-1<3^{2018}$, 所以 $2017<\log_3(2^{2017}-1)<2018$, 因此

$$[\log_3(2\cdot 3^{2017}-1)]=2017,\ \ x=[\log_3(2N-1)]+1=2018,$$

$$S=\left[\frac{(3^{2017}-2018)}{2}\right]=\frac{(3^{2017}-2019)}{2}.$$

试题 2. 给定正整数 u, v, 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1 = u + v$, 对整数 $m \geq 1$, $a_{2m} = a_m + u$, $a_{2m+1} = a_m + v$, 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 试证: 数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

(2013 年全国高中数学联赛加试题)

【题感】 从目标看, 要证 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数, 一种自然的想法是先求出 $\{S_n\}$ 的通项, 然后考察它在什么情况下为平方数.

如何求通项? 从条件看, 它是分段递归数列, 没有统一求法, 只能由特例归纳通式.

【研究特例】 观察 $\{S_n\}$ 的前面若干项:

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
a_n	u+v	2u+v	u+2v	3u+v	2u+2v	2u+2v	u+3v	4u+v
S_n	u+v	3u+2v	4u+4v	7u+5v	9u+7v	11u+9v	12u+12v	16u+13v

【割取局部】 从总体上, 我们无法求出 $\{S_n\}$ 的通项, 但可以求出 $\{S_n\}$ 的某个子列的通项.

适当挑选 S_n 中的若干项, 比如 u、v 系数相同的项, 这些项位于序列的第 $1, 3, 7, \cdots$ 项, 有明显的规律, 从而有理由相信选择是正确的.

为归纳 $\{S_n\}$ 中 u、v 的系数相等项的通式, 可利用“两个要点”对其表现形式进行整理: 同构表示、序号表示. 可发现, 当 $n = 2^t - 1$ 时, $S_n = t \cdot 2^{t-1}(u+v)$, 即

$$S_{2^t-1} = t \cdot 2^{t-1}(u+v). \tag{$*$}$$

下面用数学归纳法证明 $(*)$ 成立.

但有一个小小的陷阱: 若对序列的前 $2^t - 1$ 项利用归纳假设, 则掉入陷阱.

代数变形需要瞄准目标—因为最终形式必须含有 $u + v$, 所以变形中应尽可能使每一个项都含有 $u + v$, 这就要将“分段递归关系”相加, 以构造 $u + v$.

因为 $a_{2m} = a_m + u$, $a_{2m+1} = a_m + v$, 所以 $a_{2m} + a_{2m+1} = (a_m + u) + (a_m + v) = 2a_m + u + v$. 奠基已经完成.

设结论 $(*)$ 对 t 成立, 考虑 $t + 1$ 的情形.

留下首项 a_1 (截尾留首), 其余项每相邻两项组合, 利用上述结论产生 $u + v$, 得

$$\begin{aligned} S_{2^{t+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2^{t+1}-2} + a_{2^{t+1}-1}) \\ &= a_1 + [2a_1 + (u+v)] + [2a_2 + (u+v)] + \cdots + [2a_{2^t-1} + (u+v)] \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^t-1}) + 2^t(u+v) = 2S_{2^t-1} + 2^t(u+v) \end{aligned}$$

$$= (\text{归纳假设})\ 2t \cdot 2^{t-1}(u+v) + 2^t(u+v) = (t+1) \cdot 2^t(u+v).$$

故 $(*)$ 式成立.

【充分条件】只需证明子列中有无数个平方数, 目标变为:

寻找无数个 t, 使 $S_{2^t-1} = t \cdot 2^{t-1}(u+v)$ 为平方数.

【再找充分条件】而所谓平方数, 就是“偶幂”形式数. 原解答注意到 $t \cdot 2^{t-1}(u+v)$ 中 2^{t-1} 是质数幂形式, 最朴素的想法是 (尽管没有成功, 但大方向正确): 分离出 2^{t-1} 单独考虑, 而将 t 与 $u+v$ 搭配, 捆绑考虑.

因此, 使 $t \cdot 2^{t-1}(u+v)$ 为平方数的一个充分条件是: t 同时满足

(i) $t(u+v)$ 为平方数; (ii) $t-1$ 为偶数.

【拟对象逼近】后者比较容易满足 (取 t 为奇数即可), 所以先满足 (i).

要使 $t(u+v)$ 为平方数, 注意 $u+v$ 是题中给定的, 可让 t 含因式 $u+v$, 然后配一个平方因子 x^2 即可.

于是, 令 $t = (u+v)x^2$ 为奇数?

如果 $u+v$ 为偶数怎么办? —分离偶因子并入 2 的幂.

【修正】设 $u+v = 2^p(2q-1)$, 其中 p、q 都由常数 u、v 唯一确定. 则

$$S_{2^t-1} = t \cdot 2^{t-1}(u+v) = t(2q-1) \cdot 2^{t+p-1}.$$

【搭配捆绑】现在选取 t, 使 $t(2q-1)$、2^{t+p-1} 都为平方数.

【待定参数】首先, 要使 $t(2q-1)$ 为平方数, 注意到 $2q-1$ 为常数, 可让其再出现一次以产生“平方”, 于是取 $t = (2q-1)x^2$, $x \in \mathbb{N}$, 其中 x 为过渡参数. (x 可继续自由选定, 最终确定 t.)

现在, 再选定 x, 使 $t+p-1 = (2q-1)x^2 + p - 1$ 为偶数. 即

$$0 \equiv (2q-1)x^2 + p - 1 \equiv x^2 + p - 1 \equiv x + p - 1 \pmod 2.$$

于是, 取 $x \equiv p-1 \pmod 2$ 即可, 比如 $x = 2k+p-1$ ($k \in \mathbb{N}$).

这样的 x 有无数个, 从而 $t = (2q-1)x^2$ 有无数个, 所以有无数个 $n = 2^t - 1$, 使 $S_n = t(2q-1) \cdot 2^{t+p-1}$ 为平方数, 证毕.

【新写】先证明: 当 $n = 2^t - 1$ 时, $S_n = t \cdot 2^{t-1}(u+v)$. (略)

设 $u+v = 2^p(2q-1)$, 其中 p、q 都由 u、v 唯一确定.

取 $t = (2q-1)(2k+p-1)^2$, $k \in \mathbb{N}$, 则当 $n = 2^t - 1$ 时,

$$\begin{aligned} S_n &= t \cdot 2^{t-1}(u+v) = t \cdot 2^{t-1} \cdot 2^p(2q-1) \\ &= t(2q-1) \cdot 2^{t+p-1}. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}t+p-1&=(2q-1)(2k+p-1)^2+p-1\\&\equiv(2q-1)(2k+p-1)+p-1\\&\equiv(-1)(p-1)+p-1\\&\equiv 0\pmod 2.\end{aligned}$$

所以 2^{t+p-1} 为平方数. 又

$$\begin{aligned}t(2q-1)&=(2q-1)(2k+p-1)^2(2q-1)\\&=(2q-1)^2(2k+p-1)^2\end{aligned}$$

为平方数, 所以

$$\begin{aligned}S_n&=t\cdot 2^{t-1}(u+v)=t\cdot 2^{t-1}\cdot 2^p(2q-1)\\&=t(2q-1)\cdot 2^{t+p-1}\end{aligned}$$

为平方数.

由于 k 可为任意自然数, 从而有无数个 $n=2^t-1$, 使 S_n 为平方数, 证毕. □

原解答的核心, 是分拆 $u+v$: 将偶因子与 2 的幂合并, 但过程很繁. 如果我们保持 $u+v$ 不动, 只分拆 t, 则解答非常简单!

因为参数 t 是可人为选择的, 其 2 的幂当然可自由选定! 我们将参数 t 先分解为两部分, 分离出一个因子"2"(这是可行的, 因为 t 可自由选择!), 将其与 2^{t-1} 合并, 则已保证 2 的幂为平方数, 剩下只需另一部分 (不管是奇是偶) 与 $(u+v)$ 之积为平方数, 这很容易.

【适当分拆】令 $t=2k$ (其中 k 是过渡参数, 还可再次自由选定), 此时

$$t\cdot 2^{t-1}(u+v)=2k\cdot 2^{2k-1}(u+v)=k\cdot 2^{2k}(u+v).$$

其中 2^{2k} 已为平方数, 以下只需合并考虑 $k\,(u+v)$ 为平方数.

【结构参数】类似取 $k=(u+v)x^2$, 其中 $x\in\mathbb{N}$, 则 $t=2(u+v)x^2$. 此时, 当 $n=2^t-1$ 时,

$$\begin{aligned}S_n&=t\cdot 2^{t-1}(u+v)=2(u+v)x^2\cdot 2^{2(u+v)x^2-1}(u+v)\\&=(u+v)^2x^2\cdot 2^{2(u+v)x^2}\end{aligned}$$

为平方数.