数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

# 离散 Opial 型极值问题

汤继尧

(湖南省雅礼中学, 410007)

在新星征解第 19 期问题中, 笔者提出了如下离散 Opial 型极值问题:

**题 1.** 给定正整数 $n \geq 4$, 设实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i |x_i - x_{i+1}|$ 的最大值, 其中 $x_{n+1} = x_1$.

后来, 冷岗松教授建议笔者进一步研究二阶差分及二次情况的变式, 于是就有了下面两个结果.

**题 2.** 设 $n \geq 3$ 是给定正整数, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. 求

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i |x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}|$$

的最大值, 其中 $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.

**解** 由 $S$ 的对称性, 不妨设 $\Delta^2 x_n = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{\Delta^2 x_i \mid \Delta^2 x_i = x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}\}$.
定义数列 $i_j$ 与 $a_j$ 如下:

$$a_1 = 0, \quad i_j = \begin{cases} 1, & 若\ \Delta^2 x_{a_j+1} \leq 0 \\ 2, & 若\ \Delta^2 x_{a_j+1} > 0 \end{cases}, \quad a_{j+1} = a_j + i_j.$$

注意到 $\Delta^2 x_n = \min\limits_{1 \leq x \leq n} \{\Delta^2 x_i\}$, 故存在正整数 $k$, 使得 $a_{k+1} = n+1$.
对 $j = 1, 2, \ldots, k$, 若 $\Delta^2 x_{a_j+1} \leq 0$, 则

$$\begin{aligned} x_{a_j+1} |\Delta^2 x_{a_j+1}| &\leq \left( \frac{x_{a_j+1} - \Delta^2 x_{a_j+1}}{2} \right)^2 \\ &= \left( x_{a_j+2} - \frac{x_{a_j+3}}{2} \right)^2 \leq 1 = i_j. \end{aligned}$$

若 $\Delta^2 x_{a_j+1} > 0$, 则

$$\begin{aligned} x_{a_j+1} |\Delta^2 x_{a_j+1}| + x_{a_j+2} |\Delta^2 x_{a_j+2}| \leq & \Delta^2 x_{a_j+1} + 2x_{a_j+2} \\ = & x_{a_j+1} + x_{a_j+3} \leq 2 = i_j. \end{aligned}$$

收稿日期: **2017-07-28**; 修订日期: **2017-09-30.**

从而,

$$S=\sum_{j=1}^{k} b_i \le \sum_{j=1}^{k} i_j = n,$$

其中,

$$b_j=\begin{cases} x_{a_j+1}|\Delta^2 x_{a_j+1}|, & 若\ i_j=1; \\ x_{a_j+1}|\Delta^2 x_{a_j+1}|+x_{a_j+2}|\Delta^2 x_{a_j+2}|, & 若\ i_j=2. \end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时, 取 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(1,1,0,1,0,\ldots,1,0)$ 时等号成立;

当 $n$ 为偶数时, 取 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(1,0,1,0,\ldots,1,0)$ 时等号成立.

综上, $S$ 的最大值为 $n$. □

**题 3.** 设 $n\ge 4$ 是偶数, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1]$. 求 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i|x_i^2-x_{i+1}^2|$ 的最大值, 其中 $x_{n+1}=x_1$.

**解** 由 $S$ 的对称性, 不妨设 $x_n=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$.

定义数列 $i_j$ 与 $a_j$ 如下:

$$a_1=0,\quad i_j=\begin{cases} 1 & 若\ x_{a_j+1}\le x_{a_j+2} \\ 2 & 若\ x_{a_j+1}>x_{a_j+2} \end{cases},\quad a_{j+1}=a_j+i_j.$$

注意到 $x_n=\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}$, 故存在正整数 $k$, 使得 $a_{k+1}=n+1$.

对 $j=1,2,\ldots,k$, 若 $x_{a_j+1}\le x_{a_j+2}$, 则 $i_j=1$, 从而

$$\begin{aligned} x_{a_j+1}|x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2| \le& x_{a_j+1}(1-x_{a_j+1}^2) \\ =&\frac{1}{2}x_{a_j+1}(1+x_{a_j+1})(2-2x_{a_j+1}) \\ \le&\frac{1}{2}\left(\frac{x_{a_j+1}+1+x_{a_j+1}+2-2x_{a_j+1}}{3}\right)^3 \\ =&\frac{1}{2}<\frac{16}{27}i_j. \end{aligned}$$

若 $x_{a_j+1}>x_{a_j+2}$, 则 $i_j=2$, 从而,

$$\begin{aligned} & x_{a_j+1}|x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2|+x_{a_j+2}|x_{a_j+2}^2-x_{a_j+3}^2| \\ \le& x_{a_j+1}(x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2)+\max\{x_{a_j+2}^3,x_{a_j+2}(1-x_{a_j+2}^2)\}. \end{aligned}$$

又由于

$$x_{a_j+1}(x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2)+x_{a_j+2}^3\le 1-x_{a_j+2}^2+x_{a_j+2}^3\le 1<\frac{16}{27}i_j,$$

$$\begin{aligned} & x_{a_j+1}(x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2)+x_{a_j+2}(1-x_{a_j+2}^2) \\ \le& 1-x_{a_j+2}^2+x_{a_j+2}(1-x_{a_j+2}^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(1+x_{a_j+2})^2(1-x_{a_j+2})\\
&=\frac{1}{2}(1+x_{a_j+2})^2(2-2x_{a_j+2})\\
&\le\frac{1}{2}\left(\frac{(1+x_{a_j+2})\cdot 2+2-2x_{a_j+2}}{3}\right)^3\\
&=\frac{32}{27}=\frac{16}{27}i_j.
\end{aligned}
$$

故

$$S=\sum_{j=1}^{k}b_j\le\sum_{j=1}^{k}\frac{16}{27}i_j=\frac{16}{27}n,$$

其中,

$$b_j=\begin{cases} x_{a_j+1}|x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2|, & 若\ i_j=1;\\ x_{a_j+1}|x_{a_j+1}^2-x_{a_j+2}^2|+x_{a_j+2}|x_{a_j+2}^2-x_{a_j+3}^2|, & 若\ i_j=2.\end{cases}$$

当 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{3},\ldots,1,\frac{1}{3})$ 时取到等号. □