一道西部竞赛问题的来“龙”去脉

邹瑾

在2014 年的西部数学邀请赛上, 第一天的第四题是由我提出的:

问题 1 (CWMO 2014-4) 给定正整数 n, 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非负整数序列, 若其中连续若干项 (可以只有一项) 的算术平均值不小于 1, 则称这些项组成一条“龙”, 其中第一项称为“龙头”, 最后一项称为“龙尾”. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每一项都是“龙头”或者“龙尾”, 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值.

这个问题题目形式比较新颖, 其中结论和构造相对容易, 因此得分率达到了 19%, 在所有八道试题中得分率是第三低. 但本题证明的难度较大, 最终此题完整做对的学生只有 6 人, 是所有试题中做对人数最少的.

命制这道题的想法, 来自于下面这个问题:

问题 2 设 $a_i \in [0,1]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 求证: 存在 $x \in (0, 1)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\, x - a_i \,|} \leq 8n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}.$$

表面上看来, 问题 1 与问题 2 似乎毫无关联, 分别是纯粹的组合问题和代数问题, 但这恰恰就是数学的奇妙之处!

问题 2 是 2008 年国家队队员牟晓生在某年给国家队训练时讲解的一道例题 (据他说是在 2004 年国家队队员林运成的笔记上发现的). 当时我给 2014 年国家队的四名队员测试了一下, 居然只有一名同学完成了解答, 本题的难度可见一斑!

问题 2 标准解答如下:

问题 2 的证明一 将 $[0, 1]$ 平均分为 $2n$ 段: $[0, \frac{1}{2n}), [\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}), \cdots, [\frac{2n-1}{2n}, 1]$. 则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 至多出现在其中 n 段内, 故还有至少 n 段内不包含 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 不妨从中取出 n 段 $[\frac{t_j}{2n}, \frac{t_j+1}{2n})$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 并取每段的中点 $x_j = \frac{2t_j+1}{4n}(j = 1, 2, \cdots, n)$.

对每个 a_i, 考虑 $|a_i-x_j|$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 有 $|a_i-x_j|\geq\frac{1}{4n}$, 且取等号的情况至多只有两种. 其余 $|a_i-x_j|\geq\frac{3}{4n}$, 同样此时取等号的情况至多也只有两种. 剩下的 $|a_i-x_j|\geq\frac{5}{4n},\cdots\cdots$ 以此类推.

故有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|a_i-x_j|}\leq 2\times(4n+\frac{4n}{3}+\frac{4n}{5}+\cdots+\frac{4n}{2n-1})=8n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1},$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|a_i-x_j|}\leq 8n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1};$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x_j-a_i|}\leq 8n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}.$$

再根据抽屉原理, 必存在某一个 k, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{|x_k-a_i|}\leq 8n\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$, 此时取 $x=x_k$ 即可. (注: 对一般的 n, 此不等式等号无法取到. 2015 年国家队队员王正将此方法做了适当调整, 可以将原不等式右端的系数 8 改进为 6, 更进一步可改进为 $4+\varepsilon$, 证明留给读者.) $\square$

上面的证明看起来似乎平淡无奇, 但思想极为巧妙. 把寻找一个点的局部问题转化为找到 n 个点的整体估算, 再用抽屉原理证明其中一定存在一个满足要求的点.

在讨论本题的过程中, 2014 年国家队队员周蕴坤给出了另一种思路, 将 $[0,1]$ 区间分成 $n+1$ 段, 取 x 为其中不含 a_i 的一段的中点, 通过局部调整的方法最终完成了证明. 因为这种证明过程过于复杂, 我与另一位 2014 年国家队队员浦鸿铭在讨论过程中提出了一种简化方案, 证明如下:

问题 2 的证明二 将 $[0,1]$ 分为 $2n$ 段: $[0,\frac{1}{2n}),[\frac{1}{2n},\frac{2}{2n}),\cdots,[\frac{2n-1}{2n},1]$. 记 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 在第 1 段内有 b_1 个, 在第 2 段内有 b_2 个, $\cdots$, 在第 $2n$ 段内有 b_{2n} 个. 于是 $b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=n$.

引理 一定存在某个 b_k, 使得 $b_k=0$, 且在 $b_1,b_2,\cdots,b_{2n}$ 中, 以 b_k 开头的任意连续 m 项之和都小于 m, 以 b_k 结尾的任意连续 m 项之和也都小于 m. (引理证

明略)

根据引理, 取第 k 段的中点 $x=\frac{2k-1}{4n}$, 有 $|x-a_i|\geq\frac{1}{4n}$, 满足 $|x-a_i|<\frac{3}{4n}$ 的至多 2 项, 满足 $|x-a_i|<\frac{5}{4n}$ 的至多 4 项, $\cdots\cdots$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x-a_i|}\leq 2\times(4n+\frac{4n}{3}+\frac{4n}{5}+\cdots+\frac{4n}{2n-1})=8n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}.$$

□

这个证明的关键在于, 要想得到最终的不等式, 经过推导发现, 只需要完成其中的引理. 而此引理并没有太强的代数味道, 更像是一个组合问题. 于是, 我们对这个引理做了一个简单的“包装”, 它就摇身一变, 成为了文章最开头的“问题 1”!

问题 1 的证明有很多种, 原来给出的是归纳法的证明, 下面给出另一种更简单的极端原理证明:

问题 1 的解答: $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的最小值为 $[\frac{n}{2}]+1$.

(构造较简单, 略, 以下为证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\geq[\frac{n}{2}]+1$.)

将以 a_i 为龙头, a_j 为龙尾的龙记为 $l=(a_i,a_{i+1},\cdots,a_j)$, 称龙的长度为它包含的项数.

由于所有项不是龙头就是龙尾, 所以一定存在 m 条龙 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 包含整个数列, 设 m 为满足此条件的最小整数.

记龙 l_k 的龙头为 a_{i_k}, 龙尾为 a_{j_k}. 不妨设 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$. 由于 m 取最小值, 则必有 $a_{j_1}<a_{j_2}<\cdots<a_{j_m}$, (为什么?) 且 $a_{j_k}<a_{i_{k+2}}(k=1,2,\cdots,m-2)$ (为什么?)

于是数列的每一项在 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 中至多两条龙中出现.

由 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 包含整个数列, 可知所有龙的长度之和应该不小于 n. 而根据龙的定义, 每条龙所有项之和应该不小于其长度, 故 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 的所有项之和应该不小于 n.

于是 $2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq n$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{n}{2}$. 注意等号成立时所有龙的长度之和恰好等于 n, 即每一项恰好只能出现一次, 故等号无法成立. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \frac{n}{2}$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq [\frac{n}{2}] + 1$. □

到此为止, 关于问题 1 的来'"龙"去脉已经讲完了, 但是故事并没有结束.

在西部竞赛之后, 我又一次偶然翻阅历届 CMO 试题资料, 竟然看到了一道很类似的关于"龙"的问题:

问题 3 (CMO 1988-3) *在有限项的实数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n(*)$ 中, 如果有一段数 $a_k, \cdots, a_{k+l-1}$ 的算术平均值大于 1988, 那么我们把这段数叫做一条"龙", 并把 a_k 称为这条龙的"龙头"(如果某一项 $a_m > 1988$, 那么单独这一项也是龙). 假定数列 $(*)$ 中至少存在一条龙, 证明: $(*)$ 中全体可以作为龙头的项的算术平均值也必定为大于 1988.*

问题 3 和问题 1 的条件几乎是一样的! 幸好两个问题的结论不同, 不然可成为一次"命题事故"了! 后来经过认真的思考, 发现利用问题 3 的结论, 也可以给出问题 1 的另一种证明, 具体的过程留给读者们自己思考吧.