两道方格表染色问题的归纳解法和分治策略

聂子佩

在本文中我们将探讨两个与方格表染色有关的竞赛问题, 首先是第 7 届全苏联数学奥林匹克十年级组第三题, 这题的出现显然是由于在 Conway 的生命游戏中得到的启发.

问题 1. *在无限大的方格棋盘上选择 n 个方格组成集合 G_0. 在初始时刻 G_0 中的方格都被染成黑色, 其余方格都被染成白色. 在每个接下来的时刻 $t = 1, 2, \cdots$, 我们按以下规则将所有方格同时染色: 若方格 $(x, y), (x+1, y), (x, y+1)$ 中至少有两个在上一时刻是白色, 则 (x, y) 将会变成白色; 反之, 若方格 (x, y), $(x+1, y)$, $(x, y+1)$ 中至少有两个在上一时刻是黑色, 则 (x, y) 将会变成黑色. 令 G_k 是时刻 $t = k$ 中被染成黑色的方格的集合. 证明 $G_n = \emptyset$.*

首先, 我们想证明在每个时刻黑色方格的数量会严格减少. 然而, 这是不成立的. 尽管这样, 我们仍然可以用数学归纳法证明此题. 下面这个归纳解法并非笔者的创作, 而是当时十年级的学生 A. Gomilko 在考场上的解答. 该考生因此拿了特别奖, 这个解法也收录在苏淳编著的《苏联中学生数学奥林匹克试题汇编 (1961-1992)》一书中.

欲证命题对 $n = 0$ 成立. 假设命题对任何非负整数 $k < n$ 成立, 我们将证明它也对 n 成立.

取最小的矩形 R, 使得 R 是包括 G_0 中的所有方格在内的一些方格的并集. 记 G_0' 为 G_0 中所有不在 R 的最下面一行的所有方格的集合, 同样, 记 G_0'' 为 G_0 中所有不在 R 的最左边一列的所有方格的集合. 注意到 R 的最下面一行不会影响在它之上的方格的未来, R 的最左边一列同样也不会影响在它右边的方格的未来. 对初始集合 G_0' 与 G_0'' 利用归纳假设, 我们可以推断 G_{n-1} 只可能包含 R 的左下角这一个方格. 故 $G_n = \emptyset$. 命题得证.

现在, 我们将使用分治策略作出另一种解答. 所谓分治策略, 即是把一个关

收稿日期: 2017-11-23; 修订日期: 2017-12-03.

于整体的命题分为一些关于部分的命题逐个击破, 正如使用鸽巢原理的关键在于如何选择鸽巢一样, 使用分治策略的关键在于如何选择小命题.

用反证法, 设 $v_n \in G_n$. 对 $1 \le k \le n$, 若已经选好了 $v_k \in G_k$, 由规则知, 我们可以选择 $v_{k-1} \in G_{k-1}$, 使得 v_{k-1} 在 v_k 的右边或者上面, 且与 v_k 恰有一条公共边. 对 $1 \le k \le n$, 若 v_{k-1} 在 v_k 的右边, 令 R_k 为 v_k 所在的列中不在 v_k 的下面的所有方格的集合; 反之, 若 v_{k-1} 在 v_k 的上面, 令 R_k 为 v_k 所在的行中不在 v_k 的左边的所有方格的集合. 我们可以证明这些 R_k 两两不交, 且与 $G_0 \setminus \{v_0\}$ 都有交点. 如此, 便有了 $|G_0| \ge n+1$.

对比归纳解法和分治策略, 我们发现, 由于归纳解法只需要考虑边界上的情况, 我们常常可以得到比较简洁的证明, 但当边界的条件有所改变时, 我们的证明就需要有所改变, 且如果还有关键变量没有在结论中明示出来的话, 我们还要把它找出来并纳入归纳假设; 而如果采用分治策略, 边界情况的改变就不会对证明产生那么大的变化了. 从这个意义上来说, 采用分治策略得到的解答也许会更加本质一些.

我们再来看一题, 它是第三十三届中国数学奥林匹克的第五题.

问题 2. 设 $n \ge 3$ 为一个奇数. 我们将 $n \times n$ 的方格棋盘中的每个方格染成黑色或白色. 称两个方格相邻, 如果它们同色且有公共的顶点. 称两个方格 a, b 连通, 如果存在一列方格 $c_1, \cdots, c_k$, 其中 $c_1 = a$, $c_k = b$, 且对 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, c_i 与 c_{i+1} 相邻. 求最大的正整数 M, 使得存在一种染色方式令棋盘中的 M 个方格两两不连通.

为了简化记号, 我们将每个方格赋以坐标 (x, y), 其中 $x, y \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 称 x 坐标为 k 的所有方格的集合为 C_k, 称 y 坐标为 k 的所有方格的集合为 R_k. 此外, 令简单图 $G = (V, E(G))$ 的顶点集 V 为所有方格的集合, 两顶点相邻当且仅当它们对应的方格相邻. 由定义可知, 两顶点在图 G 中属于同一个连通分支当且仅当它们对应的方格连通. 于是, 存在 M 个两两不连通的方格当且仅当图 G 至少有 M 个连通分支.

经过一些试验, 可以猜测答案为 $\frac{(n+1)^2}{4} + 1$, 这个数字当存在 $\frac{(n+1)^2}{4}$ 个两两不连通的白色方格时出现. 我们考虑使用归纳法解决问题 2. 对方格棋盘的边长归纳是一个好主意, 保持 n 的奇偶性也是重要的, 但是如果没有强度合适的归纳假设让我们利用, 我们将无功而返. 所幸, 如下的辅助命题是有效的.

命题 1. 设奇数 $n \ge 3$, 则 $n \times n$ 的方格棋盘的任何二染色方式所对应的图

G 至多有 $\frac{(n+1)^2}{4}+\delta_0(G)$ 个连通分支. 其中我们定义

$$\delta_0(G)=\begin{cases}1, & \text{若 } (1,n) \text{ 与 } (2,n) \text{ 异色且 } (n,1) \text{ 与 } (n,2) \text{ 异色;}\\ 0, & \text{若 } (1,n) \text{ 与 } (2,n) \text{ 同色或 } (n,1) \text{ 与 } (n,2) \text{ 同色.}\end{cases}$$

证明 为了进一步简化记号, 对于 V 的子集 V_0, 我们定义 V_0 的传递闭包为

$$\overline{V_0}=\left\{v\in V: \text{存在 } v_0\in V_0 \text{ 使得 } v \text{ 与 } v_0 \text{ 在图 } G \text{ 中属于同一个连通分支}\right\}.$$

注意到, 如果 $v\in V$ 与 V_0 中两个异色方格均有公共顶点, 则 $v\in\overline{V_0}$; 同样地, 如果异色方格 $v_1,v_2\in V$ 与 V_0 中的某个方格均有公共顶点, 则 $v_1\in\overline{V_0}$ 或者 $v_2\in\overline{V_0}$. 我们定义 $f(V_0)$ 为导出子图 $G[\overline{V_0}]$ 中连通分支的个数. 于是我们的工作即是要估计 $f(V)$.

当 $n=3$ 时, 方格 $(2,2)$ 与所有方格均有公共顶点, 故 $V\setminus\overline{\{(2,2)\}}$ 的所有顶点同色, 故 $f(V\setminus\overline{\{(2,2)\}})+1\le 5$, 当且仅当 $\overline{\{(2,2)\}}=C_2\cup R_2$ 方可取等. 于是, 命题 1 对 $n=3$ 成立.

现在假设命题 1 对给定的奇数 $n\ge 3$ 成立, 我们要证明它对 $n+2$ 也成立. 令 $V_n=V\setminus(C_{n+1}\cup C_{n+2}\cup R_{n+1}\cup R_{n+2})$ 以及 $V_n^+=V\setminus(C_{n+2}\cup R_{n+2})$. 由归纳假设, 我们有 $f(V_n)\le\frac{(n+1)^2}{4}+\delta_0(G[V_n])$.

考虑导出子图 $G[V\setminus\overline{V_n^+}]$ 的连通分支的数目与有公共边的同色方格对 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_n^+\setminus V_n$ 的数目的关系. 注意到 $G[V\setminus\overline{V_n^+}]$ 的任何两个不属于同一个连通分支的方格没有公共顶点. 对 $G[V\setminus\overline{V_n^+}]$ 的一个连通分支 S, 若 $S=\{(1,n+2)\}$ 或者 $S=\{(n+2,1)\}$, 则恰有一对有公共边的方格对 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_n^+\setminus V_n$, 使得 S 中的某个方格与 v_1,v_2 均有公共顶点, 故而 v_1 与 v_2 同色; 若 $S\ne\{(1,n+2)\}$ 且 $S\ne\{(n+2,1)\}$ 且 $S\cap\{(n+1,n+2),(n+2,n+2),(n+2,n+1)\}=\emptyset$, 则至少有两对有公共边的方格对 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_n^+\setminus V_n$, 使得 S 中的某个方格与 v_1,v_2 均有公共顶点, 同样有 v_1 与 v_2 同色; 此外满足 $S\cap\{(n+1,n+2),(n+2,n+2),(n+2,n+1)\}\ne\emptyset$ 的连通分支 S 至多只有一个. 由于没有重复计算的情况, 我们可以把所有贡献加起来, 得到有公共边的同色方格对 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_n^+\setminus V_n$ 的数目不少于 $2f(V\setminus\overline{V_n^+})-3-\delta_0(G)$, 故导出子图 $G[\overline{V_n^+}\setminus V]$ 的连通分支的数目不多于 $2n-2f(V\setminus\overline{V_n^+})+4+\delta_0(G)$.

由于 $G[\overline{V_n^+}\setminus V]$ 的任意两个相邻的连通分支中至少有一个包含于 $\overline{V_n}$, 又由于当 $\delta_0(G[V_n])=1$ 时 $(1,n+1)$ 与 $(n+1,1)$ 所在的连通分支均包含于 $\overline{V_n}$, 故

$G[V_n^+ \setminus \overline{V_n}]$ 的连通分支数目不多于

$$
\begin{aligned}
&\left\lceil \frac{1}{2} \max\left\{2n - 2f(V \setminus \overline{V^+}) + 4 + \delta_0(G) - 2\delta_0(G[V_n]), 0\right\} \right\rceil \\
=&\ \max\left\{n - f(V \setminus \overline{V_n^+}) + 2 + \delta_0(G) - \delta_0(G[V_n]), 0\right\} \\
=&\ n - f(V \setminus \overline{V_n^+}) + 2 + \delta_0(G) - \delta_0(G[V_n]),
\end{aligned}
$$

其中最后一步是因为 $f(V \setminus \overline{V_n^+}) - \delta_0(G) \le n + 1 \le n + 2 - \delta_0(G[V_n])$.

最后, 我们得到

$$
\begin{aligned}
f(V) &= f(V_n) + f(V_n^+ \setminus \overline{V}_n) + f(V \setminus \overline{V_n^+}) \\
&\le \left(\frac{(n+1)^2}{4} + \delta_0(G[V_n])\right) + (n - f(V \setminus \overline{V_n^+}) + 2 + \delta_0(G) \\
&\quad - \delta_0(G[V_n])) + f(V \setminus \overline{V_n^+}) \\
&= \frac{(n+3)^2}{4} + \delta_0(G).
\end{aligned}
$$

即, 命题 1 对 $n+2$ 成立. □

接下来, 我们将给出利用分治策略得到的另一种解答.

定义集合 B 为所有黑色的方格 v 使得 v 是图 G 中 v 所在的连通分支里 x 坐标最大的方格中 y 坐标最大的; 定义集合 W 为所有白色的方格 v 使得 v 是图 G 中 v 所在的连通分支里 x 坐标最小的方格中 y 坐标最大的. 注意到, 图 G 的连通分支的个数等于 $|B \cup W|$. 下面的命题 2 和命题 3 是 B 和 W 的两个局部性质, 这些足以给出我们想要的估计.

命题 2. *若 $(x, y) \in B \setminus (C_n \cup R_n)$, 则 $(C_x \cup C_{x+1} \cup C_{x+2}) \cap (R_y \cup R_{y-1} \cup R_{y-2}) \cap W = \emptyset$. 类似地, 若 $(x, y) \in W \setminus (C_1 \cup R_n)$, 则 $(C_x \cup C_{x-1} \cup C_{x-2}) \cap (R_y \cup R_{y-1} \cup R_{y-2}) \cap B = \emptyset$.*

证明 假设 $(x, y) \in B \setminus (C_n \cup R_n)$, 由定义, 我们知道 $(x+1, y), (x+1, y+1), (x, y+1)$ 是白色的, 且若 $y > 1$, 我们知道 $(x+1, y-1)$ 也是白色的. 由于 $(C_x \cup C_{x+1} \cup C_{x+2}) \cap (R_y \cup R_{y-1} \cup R_{y-2})$ 中的任何白色方格都在图 G 中 $(x, y+1)$ 所在的连通分支里, 故由定义它们都不属于 W. 于是, 命题的前一半得证.

由对称性, 我们可以得到对后一半的证明. □

命题 3. *若 $(x, n) \in B$ 且 $(x+1, n) \in W$, 则 $(C_{x-1} \cup C_x \cup C_{x+1}) \cap B = \{(x, n)\}$ 且 $(C_x \cup C_{x+1} \cup C_{x+2}) \cap W = \{(x+1, n)\}$.*

证明 假设 $(x, n) \in B$ 且 $(x+1, n) \in W$. 若 C_x 不全是黑色方格或者 C_{x+1}

不全是白色方格, 取 y 坐标最大的方格 v, 使得 $v \in C_x$ 且为白色方格, 或者 $v \in C_{x+1}$ 且为黑色方格, 则 v 与 (x,n) 或者 $(x+1,n)$ 在图 G 中属于同一个连通分支. 由 B 和 W 的定义, 我们得到矛盾. 故 C_x 全是黑色方格而且 C_{x+1} 全是白色方格. 由于 C_{x-1} 的每一个黑色方格都在图 G 中 (x,n) 所在的连通分支中, 且 C_{x+2} 的每一个白色方格都在图 G 中 $(x+1,n)$ 所在的连通分支中, 由 B 和 W 的定义, 命题得证. $\square$

对正整数 $k \le \frac{n-3}{2}$, 若 $(2k+1,n)$ 是白色的, 我们估计 $|((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap W)|$. 由定义, 方格 $(2k+2,n-1)$, $(2k+2,n)$, $(2k+1,n-1)$ 均不属于 W, 所以

$$
\begin{aligned}
&((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap (B \setminus \{(2k,n)\})) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap (W \setminus \{(2k+1,n)\})) \\
=& (((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \setminus R_n) \cap B) \cup (((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \setminus (R_{n-1} \cup R_n)) \cap W) \\
=& \bigcup_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} (((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap (R_{2l-1} \cup R_{2l}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap (R_{2l-2} \cup R_{2l-1}) \cap W)).
\end{aligned}
$$

由命题 2, 最后式子中的每一项至多有一个元素. 若 $(2k,n) \notin B$ 或者 $(2k+1,n) \notin W$, 则 $((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap W)$ 至多有 $\frac{n+1}{2}$ 个元素. 反之, 若 $(2k,n) \in B$ 且 $(2k+1,n) \in W$, 由命题 3, 可知 $((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap W)$ 恰有两个元素. 因此, 我们得出 $|((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2w+2}) \cap W)| \le \frac{n+1}{2}$. 由对称性, 若 $(2k+1,n)$ 是黑色的, 我们也可以得出相同的结论.

接下来, 我们估计 $|(C_1 \cap B) \cup ((C_1 \cup C_2) \cap W)|$. 我们有

$$
\begin{aligned}
&((C_1 \cap (B \setminus \{1,n\})) \cup ((C_1 \cup C_2) \cap W)) \setminus ((C_1 \cup C_2) \cap (R_{n-1} \cup R_n) \cap W) \\
=& ((C_1 \setminus R_n) \cap B) \cup (((C_1 \cup C_2) \setminus (R_{n-1} \cup R_n)) \cap W) \\
=& \bigcup_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} ((C_1 \cap (R_{2l-1} \cup R_{2l}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap (R_{2l-2} \cup R_{2l-1}) \cap W)).
\end{aligned}
$$

由命题 2, 最后式子中的每一项至多有一个元素. 由于 $(C_1 \cup C_2) \cap (R_{n-1} \cup R_n) \cap W$ 至多有一个元素, 我们知道 $|(C_1 \cap B) \cup ((C_1 \cup C_2) \cap W)| \le |\{(1,n)\} \cap B| + \frac{n+1}{2}$. 由对称性, 我们有 $|((C_{n-1} \cup C_n) \cap B) \cup (C_n \cap W)| \le |\{(n,n)\} \cap W| + \frac{n+1}{2}$.

所以, 我们知道

$$
|B \cup W| = \left| \bigcup_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} ((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap W) \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} |((C_{2k} \cup C_{2k+1}) \cap B) \cup ((C_{2k+1} \cup C_{2k+2}) \cap W)| \\
&\le \frac{(n+1)^2}{4} + |\{(1,n)\} \cap B| + |\{(n,n)\} \cap W|.
\end{aligned}
$$

因此, 对任意染色方式, 若 (n,n) 是黑色的, 则对应的图 G 至多有 $\frac{(n+1)^2}{4}+1$ 个连通部分. 由对称性, 若 (n,n) 是白色的, 我们也可以得出相同的结论.