浅谈数论型函数方程

周世龙

(北京市第四中学, 100034)

在数论问题中, 有一类较为特殊: 它会以函数方程的形式呈现. 此类问题通常难度较大, 既要求对数论知识掌握透彻, 同时也需要使用函数方程的处理手段. 不过在笔者看来, 此类问题较常见的离散型函数方程 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 的求解更有价值, 更能体现离散化的本质, 有相当一部分问题既具备极高的观赏性, 又有很大的研究价值.

本文中例题有较为详细的思路分析, 练习题则以答案为主. 望各位读者通过此文, 能感受到这类问题的美.

例 1. *求所有函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 使得对于所有的 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 均有*

(1) $f(mn)=f(m)f(n)$; (2) $m+n \mid f(m)+f(n)$.

分析与解 我们先来尝试猜出本题的答案.

代入 $m,n=1$, 有 $f(1)=f^2(1)$, 结合 $f(n)\in\mathbb{N}^*$ 得 $f(1)=1$.

代入 $n=1$, 有 $m+1 \mid f(m)+1$, 于是猜测 $f(m)=m^k$, k 为奇数.

下面来证明我们的猜想是正确的.

由 $2n+1 \mid f(2n)+f(1)=f(2)f(n)+1$ 得 $(2n+1,f(2)f(n))=1$, 有 $(2n+1,f(2))=1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, 这说明 $f(2)=2^k$.

由 $1+2\mid f(1)+f(2)=f(2)+1$, 得到 k 为奇数.

对任意 $m\in\mathbb{N}^*$, $f(2^m)=f^m(2)=2^{km}$. 结合 k 为奇数, 有 $2^m+n\mid 2^{mk}+n^k$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. 再由条件 (2) 知 $2^m+n\mid f(2^m)+f(n)=2^{km}+f(n)$, 从而 $2^m+n\mid f(n)-n^k$.

由于 m 的任意性, 必有 $f(n)-n^k=0$, 即 $f(n)=n^k$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

反之, 通过验证, 易知其满足题目要求.

所以 $f(n)=n^k$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, k 为正奇数, 即为我们所求的 f. □

收稿日期: **2017-11-12;** 修订日期: **2017-12-14.**

评注 本题不难, 是一道相当常规的题目. 可以说没有过多的技巧. 最好先猜出本题答案, 后往答案上靠拢, 上面解答中关于 $f(2)$ 的解法便是如此. 这也是处理这类问题的重要方式之一.

例 2. *求所有函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 使得对于任意正整数 m,n, $f(m)+f(n)-mn$ 不为 0, 且整除 $mf(m)+nf(n)$.* [1]

分析与解 还是先尝试猜出答案. 注意到当 $f(n)=n^2$ 时, m^2-mn+n^2 的确不为 0, 且整除 m^3+n^3. 除此之外似乎并不能试出其他答案.

来验证一下. 取 $m=n=1$, 有 $2f(1)-1\mid 2f(1)$, 从而 $f(1)=1$.

对任意奇素数 p, 取另一个数为 1, 得到 $f(p)+f(1)-p\mid pf(p)+1$. 于是

$$f(p)+1-p\mid pf(p)+1-p(f(p)+1-p)=p^2+1-p.$$

若 $f(p)=p^2$, 明显成立; 下面考虑 $f(p)<p^2$ 的情况.

由于 p^2+1-p 为奇数, 显然有 $p^2+1-p\geq 3(f(p)+1-p)$, 从而

$$f(p)\leq\frac{1}{3}(p^2+2p-2).$$

再代入 $m=n=p$, 有 $2f(p)-p^2\mid 2pf(p)$, 稍加变形得

$$2f(p)-p^2\mid p^3. \tag{1}$$

然后进行一下估计, 得到

$$-p^2<2f(p)-p^2\leq\frac{2}{3}(p^2+2p-2)-p^2<-p. \tag{2}$$

上式最右端的小于号在 $p>6$ 时成立. 于是对不小于 7 的素数 p, 由式 (1) (2), 矛盾!

故 $f(p)=p^2$. 对任意正整数 n, 取 $m=p$ 代入, 有 $p^2-pn+f(n)\mid p^3+nf(n)$, 由此

$$p^2-pn+f(n)\mid p^3+nf(n)-n(p^2-pn+f(n))=p^3-np^2+n^2p.$$

取充分大的 p ($p\gg f(n)$), 此时有 $(p,f(n))=1$, 故 $p^2-pn+f(n)\mid p^2-pn+n^2$. 稍加变形, 得到 $p^2-pn+f(n)\mid n^2-f(n)$. 由 p 的性质, 必有 $n^2-f(n)=0$.

至此得到 $f(n)=n$, 证毕. □

评注 对于这类问题, 有时在我们猜出答案后可能会尝试归纳 (见下一题). 不过, 事实上, 大部分时候直接对整数情况进行归纳是行不通的, 主要是因为任意整数的情形过于复杂, 一般不是一步归纳就能轻易解决的. 此时我们不妨对特殊情况 (较常见的是奇素数时的命题) 进行讨论, 而此题提醒我们的是不要忘记不等式分析. 总体而言这是个很好的训练题.

例 3. 给定正整数 k 和 l. 求所有函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 使得对任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 均有 $f(m)+f(n)\mid(m+n+l)^k$ 成立.

分析与解 首先, 当 l 为奇数时, 取 $m=n$, 有 $2f(m)\mid(2m+l)^k$, 显然矛盾! 故 l 为奇数时不存在 f 满足题意. 下面讨论 l 为偶数的情况.

依然猜测 $f(n)=n+\frac{l}{2}$. 为往这个答案靠拢, 我们来证明如下引理:

引理 对任意 $m\in\mathbb{N}^*$, 有 $f(m+1)-f(m)=\pm1$.

显然 f 不为常值函数. 若 $|f(m+1)-f(m)|\neq 1$, 则存在素数 p, 使得 $p\mid f(m+1)-f(m)$.

取 e 使得 $p^e>m+l$. 结合条件, 有

$$f(p^e-m-l)+f(m)\mid(p^e-m-l+m+l)^k=p^{ek}.$$

又 $f(p^e-m-l)+f(m)\geq 1+1=2$, 故 $p\mid f(p^e-m-1)+f(m)$.

再由假设可推得

$$p\mid f(p^e-m-1)+f(m+1).$$

然而 $f(p^e-m-1)+f(m+1)\mid(p^e+1)^k$, 显然矛盾! 故引理证毕.

特别地, 由引理易得 $f(n)\leq f(n-1)+1\leq\cdots\leq f(1)+(n-1)$.

接下来选取充分大的素数 p, $p>l+1$, $p^2>p+2f(1)-l-2$. 注意到

$$f(1)+f(p-l-1)\mid(p-l-1+l+1)^k=p^k,$$

且

$$1<f(1)+f(p-l-1)\leq f(1)+(f(1)+p-l-2)<p^2.$$

故 $f(1)+f(p-l-1)=p$, 即 $f(p-l-1)=p-f(1)$.

然后, 再取另一满足上式的素数 q, $p>q$. 则 $f(p-l-1)=p-f(1)$, 且 $f(q-l-1)=q-f(1)$. 因此

$$\begin{aligned}p-f(1)=f(p-l-1)&\leq f(p-l-2)+1\leq\cdots\\&\leq f(q-l+1)+(p-q)=q-f(1)+(p-q)=p-f(1).\end{aligned}$$

不等式中的等号均成立, 这说明当 $q\leq n\leq p$ 时, 有 $f(n-l-1)=n-f(1)$. 特别地, 对 $n\geq q-l-1$, 有 $f(n)=n+l+1-f(1)=n+c$, 其中 c 为常数.

我们接下来固定 n, 选取 $q-l-1\leq N\leq p-l-1$ 使得 $n+N+l$ 为素数. 事实上, 由于 p 充分大, 这是可以做到的. 于是由 $f(n)+f(N)\mid(n+N+l)^k$ 可得 $f(n)+f(N)=(n+N+l)^e$, 其中 $1\leq e\leq k$.

又 $f(N)=N+c$, 当 N 趋于无穷时, 除非 $e=1$, 否则必然矛盾. 这时

$f(n) = n + l - c, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

这时代入题目条件, 有 $m + n + 2l - 2c \mid (m + n + l)^k$. 则显然有

$$m + n + 2l - 2c \mid (m + n + l - (m + n + 2l - 2c))^k = (2c - l)^k.$$

取 $m, n \to +\infty$, 右式为常值, 故必然为 0, 即 $c = \frac{l}{2}$. 所以当 l 为偶数时, $f(n) = n + \frac{l}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$; 当 l 为奇数时, 无满足题意的 f. $\square$

评注 本题在例 1 与例 2 的基础上变得更加不常规, 也更难处理了些. 大致想法仍然是往答案靠拢, 但此题进行下去时明显可以感受到阻碍, 整个过程也显得并不那么自然.

注意引理中的字母与后续证明中的相互独立, 未加区分, 请读者注意.

例 4. 对于每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 记 n 的所有正因子的数目为 $d(n)$. 求满足下列性质的所有函数 $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$:

(1) 对于所有的 $x \in \mathbb{N}^*$, $d(f(x)) = x$;

(2) 对于所有的 $x, y \in \mathbb{N}^*$, 有 $f(xy) \mid (x-1)y^{xy-1}f(x)$.

分析与解 乍看此题, 感觉第一个条件较好下手, 于是来尝试一些较为简单的情况.

由 $d(f(1)) = 1$ 得 $f(1) = 1$; 由 $d(f(2)) = 2$ 得 $f(2) = p$, p 为素数; 由 $d(f(3)) = 3$ 知 $f(3) = q^2$, q 为素数.

鉴于已设出 $f(2), f(3)$, 我们来考虑 $f(6)$.

由条件 (2) 可知, $f(6) = f(2 \cdot 3) \mid 3^{6-1}f(2) = 3^5 p$, 同时 $f(6) = f(3 \cdot 2) \mid 2 \cdot 2^{6-1}f(3) = 2^6 q^2$. 于是 $f(6) \mid (3^5 p, 2^6 q^2)$. 结合 $d(f(6)) = 6$, 易通过简单讨论知 $p = 2, q = 3$, $f(6) = 3^2 \cdot 2 = 18$.

经过上述讨论, 得到了 $f(2) = 2 = 2^{2-1}$, $f(3) = 3^2 = 3^{3-1}$.

于是我们猜测并证明如下引理:

引理 1. $f(p) = p^{p-1}$, p 为素数.

由条件 (1) 知 $d(f(p)) = p$, 结合 p 为素数, 可知 $f(p) = q^{p-1}$, q 为素数.

考虑 $f(2p) = f(2 \cdot p) \mid p^{2p-1} \cdot 2$, $f(2p) = f(p \cdot 2) \mid (p-1) \cdot 2^{2p-1} \cdot q^{p-1}$.

故 $f(2p) \mid 2 \cdot (p^{2p-1}, (p-1)q^{p-1})$, 易得 $(p^{2q-1}, q^{p-1}) \neq 1$, 否则 $f(2p) \mid 2$, 这显然是不成立的. 于是 $p = q$. 此时 $f(p) = p^{p-1}$, 引理 1 证毕.

继续进行尝试, 知 $f(4) = f(2 \cdot 2) \mid 2^3 f(2) = 2^4$, 结合 $d(f(4)) = 4$, 知 $f(4) = 2^3$.

多进行几组尝试 (此处略去) 后, 可发现素数的幂也满足引理 1 的形式. 于

是我们证明:

引理 2. $f(p^n)=p^{p^n-1}$, p 为素数.

对 n 归纳.

$n=1$ 时, 即为引理 1.

假设命题对 $n-1$ 时成立, 考虑 n 时的命题.

由条件 (2) 知

$$f(p^n)=f(p\cdot p^{n-1})\mid(p-1)\cdot(p^{n-1})^{p^n-1}f(p)=(p-1)p^{(n-1)(p^n-1)+p-1}:=A,$$

且

$$f(p^n)=f(p^{n-1}\cdot p)\mid(p^{n-1}-1)p^{p^n-1}f(p^{n-1})=(p^n-1)p^{p^n-1+p^{n-1}-1}:=B.$$

又知 $((p^n-1),p)=1$, $p-1\mid p^n-1$, 于是 $f(p^n)\mid(A,B)=(p-1)p^{p^n+p^{n-1}-2}$.

由条件 (1) 知 $d(f(p^n))=p^n$, 若 $p-1$ 中含有 $f(p^n)$ 的素因子, 则其次数必 $\geq p-1$. 显然 $2^{p-1}>p-1$, 矛盾! 于是得到 $f(p^n)$ 只含素因子 p, 结合 $d(f(p^n))=p^n$, 有 $f(p^n)=p^{p^n-1}$, 于是引理 2 证毕.

至此已完成了对素数的幂情况的证明. 稍加尝试后, 便可猜到此函数的一般形式. 但前面的证明只运用了条件和整除分析, 然而在证明一般情况时, 由于素因子数量的增多, 无法确定各种 $(p-1)$ 型因子与其他因子的最大公约数. 若仍只是用这些手段, 无疑将是极为复杂甚至走不下去的 (读者可自行尝试).

但我们可从上述证明过程中得到启发: $f(p^n)$ 只含素因子 p. 这引发了我们对如下引理的证明:

引理 3. 对于任意的正整数 n, 它的素因子与 $f(n)$ 的素因子完全相同.

设 $p=\min\limits_{p_i\mid n}p_i$, 其中 p_i 为素数.

则由条件 (2), 我们设 $m=\frac{n}{p}$, 有

$$f(n)=f(p\cdot m)\mid(p-1)m^{n-1}f(p)=(p-1)m^{n-1}p^{p-1}.$$

分离 $f(n)$ 的因子, 设 $f(n)=kN$, 其中 $(k,n)=1$, $p_i\mid N$. 下面只需说明 $k=1$ 即可.

由于 $k\mid(p-1)m^{n-1}f(p)$, 从而 $k\mid p-1$, 且 $d(k)\leq k<p$.

由条件 (1), $n=d(f(n))=d(kN)$, 且 $(k,N)=1$, 知 $n=d(kN)=d(k)d(N)$, $d(k)\mid n$.

上面已经说明了 $d(k)<p$, 于是 $d(k)=1$, 即 $k=1$, 引理 3 证毕.

自然地, 也可仿照引理 2 的证明完成此题. 不过此处给一个稍简单的方法.

设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$, 则由引理 3, $f(n)=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$. 结合条件 (2), 设 $x_i=\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$, 我们

有 $p_i^{\beta_i} \mid f(n) \mid (p_i^{\alpha_i}-1)x_i^{n-1}f(p_i^{\alpha_i})$.

由于 $(p_i(p_i^{\alpha_i}-1)x_i^{n-1})=1$, 有 $p_i^{\beta_i} \mid f(p_i^{\alpha_i})=p_i^{p_i^{\alpha_i}-1}$, 从而 $\beta_i \le p_i^{\alpha_i}-1$. 结合条件 (1), 等号必须取到, 此处不再赘述.

至此得到了 $f: f(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{p_i^{\alpha_i-1}}$, 当 $n=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ 时. 我们完成了对本题的解答. □

评注 此题可以说是一个非常经典的题目, 用到的手段着实不多: 整除的性质, 算术基本定理, 似乎也就仅此而已了. 但看似过程一气呵成, 此题仍具有一定的难度, 自己做下来也并非一帆风顺.

此题之所以典型, 在于其思想的重要性: 从特殊到一般. 这对于大部分难题是不可或缺的.

例 5. 对于不小于 5 的素数 p 和正整数 n, 求所有函数 $f:\mathbb{Z}^* \to \mathbb{N}$, 满足:

(1) 对所有满足 $a_i \notin \{0,1\}$ $(1 \le i \le p-2)$ 且 $p \nmid a_i-1$ 的整数序列, 有 $\sum\limits_{i=1}^{p-2} f(a_i)=f(\prod\limits_{i=1}^{p-2} a_i)$.

(2) 对任意的互质整数 a,b, 当 $a \equiv b \pmod p$ 时, $f(a)=f(b)$.

(3) 对任意正整数 n, 存在 $l \in \mathbb{Z}^*$, 使得 $f(l)=n$. [3]

分析与解 题目不允许我们取 $a_i=1$, 不妨取 $a_i=-1$, 这时 $(p-2)f(-1)=f(-1)$, 则 $f(-1)=0$.

取 $a_i=i+1$, 据 Wilson 定理, 结合条件 (2), 必有 $\sum\limits_{i=2}^{p-1} f(i)=f(\prod\limits_{i=2}^{p-1} i)=f(-1)=0$. 由题意, 函数的值域为非负整数, 所以 $f(i)=0$, $2 \le i \le p-1$.

再取 $a_1=4$, 其余 $a_i=2$, 由 Fermat 小定理, $\sum\limits_{i=1}^{p-2} f(a_i)=f(2^{p-1})=f(1)=0$.

当 $(a,p)=1$ 时, $(a,a+kp)=1$. 结合条件 (2), 得 $f(n)=0$, 当 $p \nmid n$ 时.

至此我们已将与 p 互素的正整数讨论完全. 下面来说明 $p \mid n$ 时的情况.

取 $a_1=x, a_2=y$ (其中 $xy \equiv -1 \pmod p$), $a_3=a_4=p$, 其余 $a_i=-1$, 可知 $2f(p)=f(p^2)$, 经过简单的归纳, 可得 $f(p^k)=kf(p)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

对任意与 p 互素的整数 r, 若 $p \nmid r-1$, 取 $a_1=r$, $a_2=p^{k-1}$, $a_3=p$, 其余 $a_i=-1$, 有 $f(rp^k)=\sum\limits_{i=1}^{p-2} a_i=kf(p)$. 若 $p \mid r-1$, 不妨设 $r=mp+1$, 我们不能直接代入 r, 但在证明了上述情况后, 可进行一些处理. 取 $a_1=(mp+1)p^k$, $a_2=(mp-1)p^k$, $a_3=x, a_4=y$ (仍有 $xy \equiv -1 \pmod p$), 其余 $a_i=-1$, 则

$$f((mp+1)p^k)=f((m^2p^2-1)p^{2k})-f((mp-1)p^k)=kf(p).$$

整理一下, 我们有 $f(n)=\alpha\nu_p(n)$, 其中 $\alpha=f(p)$.

再结合条件 3, 知 $f(p) \mid f(l)=n$, 故最终得到 $f(n)=\alpha\nu_p(n)$, 其中 α 为 n

的因子. □

评注 一道相当精彩的题目, 这几步赋值其实都相当关键且漂亮, 不失为一道好的习题. 原题目的题设是"证明 f 的个数与 n 的因子个数相同". 应该说命题者的目的在于给选手提示, 但在实际过程中这反而可能会让人想多 (笔者便是如此).

这题相对于以上几道还是"数论的". 其实对于这类问题, 何时该使用代数手段处理, 何时该利用数论知识构造或分析, 是难点, 同时也是魅力所在.

例 6. *求所有 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$, 使得对任意 $x\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{Z}_+$, 有*

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right).$$

分析与解 我们可先取 $a=0$, $b=1$, 得到 $f(f(x))=f(x)$, 这说明 f 或为常函数, 或为在整数上的恒等映射, 结合原式比较容易猜到天花板和地板两种高斯函数. 故猜测 $f(x)\equiv c$, $c\in\mathbb{Z}$; $f(x)=\lfloor x\rfloor$; $f(x)=\lceil x\rceil$ (注意不要算上 $f(x)=x$, 因为是 $\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$). 在以上三种中常函数较特殊, 故先来处理它, 为方便书写, 以引理的形式呈现.

引理 若存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $f(n)\neq n$, 则必有 $f(n)\equiv c$, $c\in\mathbb{Z}$.

不妨设 $m=f(n)\neq n$, 代入 $x=n$, $a=kb-m$ $(\forall\, k\in\mathbb{Z})$, $b=|m-n|$, 有 $f(k)=f(k\pm1)$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$. 不论加减, 必然会得到 $f(n)\equiv c$, $n\in\mathbb{Z}$.

上面提到了 $f(f(x))=f(x)$, 结合 $f(x)\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(f(x))=c\Rightarrow f(x)\equiv c$, $x\in\mathbb{Q}$, $c\in\mathbb{Z}$.

至此引理证毕.

接下来讨论非常函数的情况. 据引理可知 $f(n)=n$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}$. 我们还有一个简单的小结论: $f(x+a)=f(f(x)+a)=f(x)+a$, $x\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{Z}$. 这是易于证明的.

下面的证明分步给出.

(1) $f(\frac{1}{2})\in\{0,1\}$.

讨论需先从特殊情况开始. 取 $x=\frac{1}{2}$, $b=2a+1$, 有

$$f\left(\frac{f(\frac{1}{2})+a}{2a+1}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{2}+a}{2a+1}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

欲证 $f(\frac{1}{2})\in\{0,1\}$, 我们进行一下分段:

i) 若 $f(\frac{1}{2})\geq1$, 取 $a=f(\frac{1}{2})-1$, 会得到 $f(\frac{2f(\frac{1}{2})-1}{2f(\frac{1}{2})-1})=f(1)=1=f(\frac{1}{2})$;

ii)若 $f(\frac{1}{2})\leq0$, 取 $a=-f(\frac{1}{2})$, 得到 $f(0)=0=f(\frac{1}{2})$ (为什么可以这样分段留给读者思考). 故 (1) 证毕.

(2) 当 $f(\frac{1}{2})=0$ 时, $f(x)=\lfloor x\rfloor$.

结合上面的小结论, 其实只需证明: 对任意的 $0<k<n$, $f(\frac{k}{n})=0$.

先来证明: $n=2^k$ 时命题成立.

对 k 归纳. $k=1$ 已给出, 假设 $k-1$ 时成立, 讨论 k 时的命题.

易知 $f(\frac{1}{2^k})=f(\frac{\frac{l}{2^{k-1}}}{2})=f(\frac{f(\frac{1}{2^{k-1}})}{2})$, 结合 $0<l<2^k\Rightarrow f(\frac{l}{2^{k-1}})=0$ 或 1. 而 $f(0)=f(\frac{1}{2})=0$, 故 k 时命题成立.

回到原题, 对 n 归纳. $n=2$ 已给出. 假设 $n-1$ 时成立, 讨论 n 时的命题.

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{f(\frac{1}{n-1})+1}{n}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{n-1}+1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n-1}\right)=0,$$

直至 $f(\frac{n-2}{n})$ 均类似操作即可.

注意到 $f(\frac{n-1}{n})=f(-\frac{1}{n}+1)=f(\frac{f(\frac{1}{2^{\varphi(n)}})-1}{n}+1)=f(\frac{\frac{1-2^{\varphi(n)}}{n}}{2^{\varphi(n)}}+1)$, 这里 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数. 由于 $2^{\varphi(n)}>\frac{2^{\varphi(n)}-1}{n}\in\mathbb{Z}$, 由前面 2^k 的结论不难得出 $f(\frac{n-1}{n})=0$. 于是 (2) 证毕.

(3) 当 $f(\frac{1}{2})=1, f(x)=\lceil x\rceil$.

证明与 (2) 几乎完全相同, 读者可自行探究, 此处不再赘述.

故我们证明了上述猜想为真, 证毕. □

评注 初看此题, 若不是官方标注它是数论题, 笔者可能会在代数的道路上一路走到黑. 官方的答案似乎讨论得有些麻烦, 上述解法可能稍方便些. 其实总体上来说我们的目的便是证明有且仅有那三个函数满足题意, 故总体而言, 在确定方向后, 思路还算清晰, 剩下的便是慢慢摸索完成证明了.

例 7. 已知函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 同时满足:

(1) 对任意正整数 m,n, 有 $(f(m),f(n))\le(m,n)^{2014}$.

(2) 对任意正整数 n, 有 $n\le f(n)\le n+2014$.

证明: 存在正整数 N, 使得对每个整数 $n\ge N$, 均有 $f(n)=n$.

分析与解 考察 (1) 的特殊情况: 当 $(m,n)=1$ 时, $(f(m),f(n))\le(m,n)^{2014}=1$, 得 $(f(m),f(n))=1$.

而 (2) 是一个限定 $f(n)$ 范围的条件. 故欲证在一定条件下 $f(n)=n$, 我们可考虑如下命题:

引理 对素数 p, 若 $p\mid f(n)$, 则 $p\mid n$.

由 (1) 知: 当 $(f(m),f(n))>1$ 时, 有 $(m,n)>1$.

假设存在 $p\mid m+l=f(m)$, 其中 $p\nmid m$. 我们取 2015^2-1 个不同于 p 且大于 2014 的互异素数 $p_{i,j}$ $(i,j=0,1,2,\cdots,2014)$ $(p_{0,0}=1)$. 此时有 $(p_{i,j},pm)=1$.

由中国剩余定理, 存在 n_0 使得 $p\nmid n_0$, 且 $\prod\limits_{k=0}^{2014} p_{i,k} \mid n_0+i, \forall\, 0\le i\le 2014$.

再由中国剩余定理, 取 n_1 使得 $p \mid n_1$, $(n_0,n_1)=1$, $(n_1,m)=1$, 且 $\prod\limits_{i=0}^{2014} p_{i,j} \mid n_1+j, \forall\, 0\le j\le 2014$. 此时若 $f(n_1)\ne n_1$, 显然 $(n_0+i,n_1+j)>1, \forall\, 0\le i,j\le 2014$, $j\ne 0$, 但 $(n_0,n_1)=1$, 与 (1) 矛盾. 于是 $f(n_1)=n_1$. 但 $(n_1,m)=1$, $(f(n_1),f(m))=(n_1,f(m))\ge p$, 矛盾! 这说明假设不成立.

接下来的一个想法是“平移”: 若存在 $d>n$, 使得 $f(d+i)=d+i$ $(i=1,2,\cdots,2014)$, 由 (2) 可知 $d\le f(d)\le d+2013$, 我们只需导出 $f(d)=d$, 那么以此类推, 就有对 $n\in[N,d]$, $f(n)=n$. 而欲得到 $f(d)=d$, 自然想到证 f 在 $[N,+\infty)$ 为单射, 大概确定一下 N 的范围.

若存在 $a>b>N$, 使得 $f(a)=f(b)$. 由 (1), 有 $(f(a),f(b))\le(a,b)^{2014}\le|a-b|^{2014}$.

由 (2), 易知 $|a-b|\le 2014$. 而事实上 $(f(a),f(b))=f(a)\ge a>N$, 为推得矛盾, 可取 $N\ge 2014^{2014}+1$. 此时满足了 $f(n)=n$ 的单射性.

最后我们来确定 d 的存在性与无穷性, 以及 N 的取值.

取互异的素数 $p_j>2014$ $(j=1,2,\cdots,4028)$, 取 $d\equiv -j \pmod{p_j}$. 由中国剩余定理知 d 有无穷多个解, 记其中最小的正整数解为 $d_0, d_1=d_0+\prod\limits_{j=1}^{4028} p_j$.

易知 $d_1>N$, $p_j\mid d_1+j$, 且 $p_j\nmid d_1+i$, 当 $i\ne j$ 时, $1\le i\le 2014$.

由 (2) 知 $d_1+i\le f(d_1+i)\le 2014+d_1+i$, 结合 $p_j>2014$, 且

$$d_1+1\le f(d_1+i)\le d_1+2014+2014=d_1+4028,$$

由引理, 必有 $f(d_1+i)=d_1+i$, $1\le i\le 2014$. 结合上面的“平移”思想知 $f(n)=n$, $n\in[N,d_1+2014]$, 而对于 $\forall\, n\ge N$, 取合适的 k 使得 $d=d_0+k\prod\limits_{i=0}^{4028} p_i>n+2014$, 则同上, 必有 $f(n)=n$.

上述讨论对 N 没有额外要求, 故 $N=2014^{2014}+1$ 满足题意. 我们完成了本题的证明. $\square$

评注 难度不小. 首先几步中国剩余定理就需要反复地斟酌, 而解题的方向也着实不太好确立.

注意在确定 $f(d+i), 1\le i\le 2014$ 时, 因为有 4028 个可能的取值, 所以不能只取 2014 个素数. 还有, 过程前后的 p_i 与 $p_{i,j}$ 无关, 请勿混淆.

其实本题的引理也是一道试题. 笔者对引理的证明可能有些繁琐, 若读者有较为简洁的方法, 可与笔者交流, 谢谢!

后注 上面的例题中有一部分解答是笔者完成的, 由于水平不足和疏忽难免

可能出现纰漏. 若读者发现解答有误, 或有更好的方法, 还请不吝指出. 笔者的邮箱为 m13121806586@163.com.

练习题:

1. 试求满足下列条件的函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 对任意的 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 有 $n+f(m)\mid f(n)+nf(m)$.

提示 通过两种变形, 分别为

(1) $n+f(m)\mid f(n)-n^2$; (2) $n+f(m)\mid f(n)-f^2(m)$.

我们分 $f(n)$ 是否有界进行讨论, 简单讨论可得 (1) $f(n)=n^2$; (2) $f(n)\equiv 1$, 此即为我们所求的所有 f.

2. 求所有满射函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 使得对任意的 $m,n\in\mathbb{N}^*$ 和任意的素数 p, $p\mid m+n$ 当且仅当 $p\mid f(m)+f(n)$.

提示 需先猜测 $f(n)=n$ (这是由于任意素数整除的条件相当强).

我们来分几步完成对此题的证明. 对任意素数 p, 找出最小的 $m\in\mathbb{N}^*$, 使得 $p\mid f(m)$.

先证 $p\mid f(x)\Leftrightarrow m\mid x$, 再证 $f(x)\equiv f(y)\pmod p\Leftrightarrow x\equiv y\pmod m$. 观察可得 $p=m$ (同样易证). 上述结论有一推论: 若 $x=y+1$, 则 $f(x)=f(y)\pm 1$. 后面利用上述推论, 归纳即可证 $f(x)=x$.

3. 是否存在一个函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, 满足: (1) 存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $f(n)\neq n$; (2) $d(m)=f(n)$ 当且仅当 $d(f(m))=n$, 其中 $d(n)$ 表示 n 的因子个数.

提示 存在. 我们如下定义 $f:f(1)=1,f(2)=2,f(3)=5,f(5)=3$.

然后进行递归定义: 假设 $f(k)$ $(1\le k\le n-1)$ 均已被定义, 由于 $d(n)<n$, 设 $j=f(d(n))$, 则 j 已被定义.

设 $D_k=\{n\in\mathbb{N}^*\mid d(n)=k\}$, 而对任意的素数 p, $p^{k-1}\in D_k$, 故 $k>1$ 时 D_k 为无穷集.

设 t 为 D_j 中未被定义的最小元素, 定义 $f(t)=n,f(n)=t$. 经过验证, 知此函数满足题意.

参考文献

[1] Shortlisted Problems with Solutions (2016).http://imoofficial.org/problems/IMO2016SL.pdf.

[2] Function Equation(March 23, 2016). [Online] Available: https:// artofproblemsolving.com/community/c6h1212550.

[3] Proofathon Spring Contest-Problem8(May 1, 2015). [Online] Available: https://artofproblemsolving.com/community/c587h1083995.