2017 年秋季上海新星数学奥林匹克试题解析

吴尉迟[1] 叶思[1] 施柯杰[2]

(1. 上海大学数学系, 200444; 2. 复旦大学附属中学, 200433)

2017 年秋季上海新星数学奥林匹克于2017 年 11 月 22 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答.

I. 试 题

1. 设 AM 和 CN 是一个锐角 $\triangle ABC$ 的两条高. Y 是直线 AC 和 MN 的交点. 点 X 位于 $\triangle ABC$ 内使得四边形 $MBNX$ 是一个平行四边形. 证明: $\angle MXN$ 的角平分线垂直于 $\angle MYC$ 的角平分线.

(上海大学 叶思 供题)

2. 对给定的正整数 n $(n \geq 2)$, 求最小的正整数 k, 使得对任意 k 个不同的整数中必存在两个不同的数, 其和或差为 n 的倍数.

(复旦大学附属中学 施柯杰 供题)

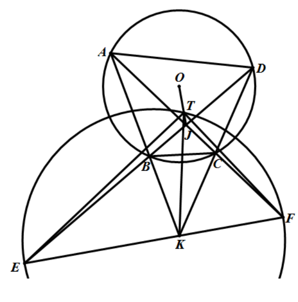
3. 设 p 是大于 5 的素数, 证明存在两个正整数 m, n, 使得 $m+n<p$ 且 $p \mid 2^m 3^n - 1$.

(上海大学 吴尉迟 供题)

4. 给定正整数 $n \geq 2$, 求最小的实数 c, 使得对任意非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 满足 $a_{i-1} + a_{i+1} \leq c a_i$, 其中 $a_0 = a_{n+1} = 0$.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 且 $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. 直线 AB, CD 交于 K. AC, BD 交于 J $(O, J$ 不重合). 过 K 作 OJ 的垂线, 分别与直线 BD, AC 交于 E, F. 以 EF 为直径的圆与线段 OJ 交于 T. 证明: KT 平分 $\angle ETF$. (广西 卢圣 供题)



收稿日期: 2017-12-10; 修订日期: 2018-01-22.

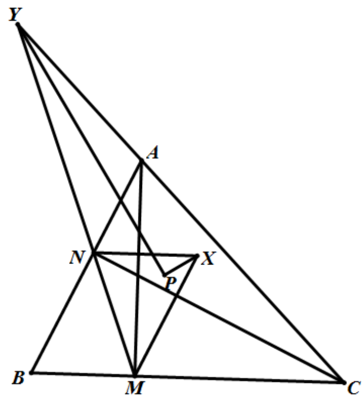
6. 给定正整数 $m, n\ (1 \le m \le n)$, 在 $m \times n$ 棋盘 M 的每个方格中填上 1 或 -1, 然后进行如下操作: 将同行 (或同列) 的每个数都同时加上 1.

如果最初棋盘 M 中恰有 r 个 1, 求所有的正整数 r, 使无论最初 r 个 1 填在哪些方格中, 都不能通过有限次操作使各数变得相等.

(深圳高级中学 冯跃峰 供题)

Ⅱ. 解 答

题 1. 设 AM 和 CN 是一个锐角 $\triangle ABC$ 的两条高. Y 是直线 AC 和 MN 的交点. 点 X 位于 $\triangle ABC$ 内使得四边形 $MBNX$ 是一个平行四边形. 证明: $\angle MXN$ 的角平分线垂直于 $\angle MYC$ 的角平分线.



证明 由 $\triangle ABM \backsim \triangle CBN$ 得

$$\frac{BM}{BN} = \frac{AB}{BC}.$$

从而 $\triangle BMN \backsim \triangle BAC$, 故 $\angle BMN = \angle BAC$.

设 $\angle MXN$ 与 $\angle MYC$ 的角平分线交于 P, 则

$$\begin{aligned}
\angle YPX &= \angle YNX + \frac{1}{2}\angle MYC - \frac{1}{2}\angle MXN \\
&= 180^\circ - \angle XNM + \frac{1}{2}(\angle BMN - \angle BCA) - \frac{1}{2}\angle ABC \\
&= 180^\circ - \angle BMN + \frac{1}{2}(\angle BMN - \angle BCA) - \frac{1}{2}\angle ABC \\
&= 180^\circ - \angle BAC + \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle BCA) - \frac{1}{2}\angle ABC \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC) = 90^\circ.
\end{aligned}$$

命题得证. □

评注 这是简单题, 只需注意角之间的关系即可. 绝大多数的同学做对了此题.

题 2. 对给定的正整数 $n\ (n\geq 2)$, 求最小的正整数 k, 使得对任意 k 个不同的整数中必存在两个不同的数, 其和或差为 n 的倍数.

解 答案为: $k_{\min}=2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

一方面, 考虑 $1+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个数 $0,1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. 显然它们中任意两个不同的数的差不为 n 的倍数, 其中任意两个不同的数的和均小于 n, 因而也不为 n 的倍数. 这说明满足条件的 $k\geq 2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

下证 $k=2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 时结论成立.

对任意 $2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个不同的整数, 将其中模 n 的余 i 和 $n-i$ 的数分为一组 $(i=0,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$, 这样至多有 $1+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 组. 由抽屉原理知 $2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个数必有两个数属于同一组. 若这两个数模 n 同余, 则其差为 n 的倍数; 若它们模 n 不同余, 则其和为 n 的倍数. 这说明此时结论成立.

综上, $k_{\min}=2+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. □

评注 此题为容易题, 约 70% 的同学作对了此题. 由题设容易想到构造 $1+\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 个抽屉 (即将和或差为 n 的倍数的数放到一组).

题 3. 设 p 是大于 5 的素数, 证明存在两个正整数 m,n, 使得 $m+n<p$ 且 $p\mid 2^m3^n-1$.

证法一 考虑形如 2^i3^j 的数, 其中 $1\leq i,j\leq p-1$. 则这样的数共有 $(p-1)^2$ 个. 注意到 $(p-1)^2\geq p+1$, 故由抽屉原理可知存在不同的正整数对 (i_1,j_1), (i_2,j_2) 使得

$$2^{i_1}3^{j_1}\equiv 2^{i_2}3^{j_2}\pmod p,\ 1\leq i_1,i_2,j_1,j_2\leq p-1.$$

由于 $i_1\neq i_2$ 或 $j_1\neq j_2$, 结合上式知 $i_1\neq i_2$ 且 $j_2\neq j_2$.

又由费马小定理知 $2^{p-1}\equiv 3^{p-1}\equiv 1\pmod p$, 从而

$$2^{p-1}2^{i_1}3^{j_1}\equiv 2^{i_2}3^{j_2}3^{p-1}\pmod p,$$

即

$$2^{p-1+i_1-i_2}\equiv 3^{p-1+j_2-j_1}\pmod p.$$

令

$$i=\begin{cases} i_1-i_2 & 若\ i_1>i_2\\ i_1-i_2+p-1 & 若\ i_1\leq i_2\end{cases},\ j=\begin{cases} j_1-j_2 & 若\ j_1>j_2\\ j_1-j_2+p-1 & 若\ j_1\leq j_2\end{cases},$$

则有

$$2^i\equiv 3^j\pmod p.$$

若 $i \le j$, 令 $m=i$, $n=p-1-j$, 此时正整数 m,n 满足 $m+n<p$ 且

$$2^m3^n \equiv 2^i3^{p-1-j} \equiv 3^j3^{p-1-j} \equiv 3^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

若 $i>j$, 令 $m=p-1-i$, $n=j$, 此时正整数 m,n 满足 $m+n<p$ 且

$$2^m3^n \equiv 2^{p-1-i}3^j \equiv 2^{p-1-i}2^i \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

命题得证. □

证法二 设 $2,3$ 模 p 的阶分别为 s,t, 又由费马小定理知,

$$2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

从而 $s \mid p-1, t \mid p-1$. 下分两种情况证明结论.

1) 若 $s=p-1$ 或 $t=p-1$. 当 $s=p-1$ 时, 此时, $2,\cdots,2^{p-1}$ 构成模 p 的完系, 从而存在正整数 $0 \le k \le p-1$, 使得 $2^k3 \equiv 1 \pmod p$. 注意到 $k=0$ 或 $p-1$ 均不满足上式, 从而有 $0<k<p-1$. 此时, 令 $m=k,n=1$ 即可满足要求. 同理, 当 $t=p-1$ 时, 也存在满足要求的 m,n.

2) 若 $s \ne p-1$ 且 $t \ne p-1$. 结合 $s \mid p-1, t \mid p-1$ 知 $s,t \le \frac{p-1}{2}$. 此时令 $m=s,n=t$, 则有 $m+n \le p-1 < p$, $2^m3^n \equiv 1 \pmod p$.

由 1) 和 2) 知结论成立. □

评注 (1). 此题为中等偏易的题,约有 50% 的同学做对了此题. 证法一是基于费马小定理的一个朴素的想法, 即只需证明存在小于 $p-1$ 的正整数 i,j 使得 $2^i \equiv 3^j \pmod p$, 而该结果用抽屉原理便可证明. 证法二给出了一个利用阶的简单证明, 相较于证法一, 其优点是可以利用该方法证明多元的情形: 设 p 是大于 7 的素数, 则存在两个正整数 m,n,l, 使得 $m+n+l<\frac{3p}{2}$ 且 $p \mid 2^m3^n5^l-1$.

(2). 下面的证法给出了 $m+n$ 上界的一个更强的估计(这个上界当 $p=7$ 时可以取到, 此时 $m=n=2$), 即证明如下命题:

设 p 是大于 5 的素数, 证明存在两个正整数 m,n, 使得 $m+n \le \frac{p+1}{2}$ 且 $p \mid 2^m3^n-1$.

证明 设 $2,3$ 模 p 的阶分别为 s,t, 从而 $\max\{s,t\} = \frac{p-1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$. 若 $\max\{s,t\} \le \frac{p-1}{4}$, 则我们取 $n=s,m=t$ 即可满足要求. 故只需考虑 $k=1,2,3$ 的情形. 由对称性, 可不妨设 $s \ge t$. 则有 $\max\{s,t\}=s$.

i) 若 $k=1$, 即 $s=p-1$, 从而存在 $1<l<p$ 使得 $2^l \equiv 3 \pmod p$. 设 $p-1=lq+r$, 其中 $r \le l, q,r \in \mathbb{N}^*$.

现在我们取 $n=r,m=q$, 则我们有 $2^n3^m \equiv 2^r2^{lq} \equiv 1 \pmod p$. 注意到 $q+r \le \frac{p-1}{l}+l-1$, 故若 $l \le \frac{p-1}{2}$, 则由 $2 \le l \le \frac{p-1}{2}$ 知 m,n 满足条件. 若 $l > \frac{p-1}{2}$,

则 $q=1$, 从而由 $p-1=lq+r$ 知 $n+m=p-l$, 此时 m,n 也满足要求.

ii) 当 $k=2,3$ 时, 令 $I_s=\{2^i(\bmod p)|1\le i\le s\}$. 我们证明存在正整数 $j\le k$, 满足 $3^j\in I_s$. 事实上, 若 $3,\dots,3^{k-1}\notin I_s$, 设 $3^q\times I_s=\{3^q2^i(\bmod p)|1\le i\le s\}$, 则此时, $3^q\times I_s$, $q=0,\dots,k-1$ 互不相交, 又注意到 $s=\frac{p-1}{k}$, 从而

$$\{1,2,\dots,p-1\}=\bigcup_{q=0}^{k-1}3^q\times I_s.$$

这时, $3^k\in I_s$. 从而存在正整数 $1\le l\le s$, 使得 $2^l\equiv 3^j\ (\bmod p)$. 取 $n=s-l, m=j$, 则有 $m+n\le\frac{p-1}{k}+k-1\le\frac{p+1}{2}$ 且 $2^m3^n\equiv 2^{s-l}2^l\equiv 1\ (\bmod p)$.

结合 i), ii) 知结论成立. $\square$

题 4. 给定正整数 $n\ge 2$, 求最小的实数 c, 使得对任意非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 满足 $a_{i-1}+a_{i+1}\le ca_i$, 其中 $a_0=a_{n+1}=0$.

解 当 $c<2\cos\frac{\pi}{n+1}$ 时, 对 $0\le k\le n+1$, 取 $a_k=\sin\frac{k\pi}{n+1}$. 此时对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,

$$a_{i-1}+a_{i+1}=\sin\frac{(i-1)\pi}{n+1}+\sin\frac{(i+1)\pi}{n+1}=2\cos\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{i\pi}{n+1}>ca_i,$$

不满足要求.

下证当 $c=2\cos\frac{\pi}{n+1}$ 时满足要求. 否则, 对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 都有

$$a_{i-1}+a_{i+1}>2a_i\cos\frac{\pi}{n+1}. \tag{$*$}$$

我们归纳证明, 对 $1\le k\le n-1$, 满足

$$a_{k+1}>\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{k\pi}{n+1}}a_k.$$

当 $k=1$ 时, 在 $(*)$ 中取 $i=1$ 得, $a_2>2a_1\cos\frac{\pi}{n+1}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{n+1}}$ 成立.

假设 $k-1$ 时成立, 来看 k 时的情形.

由归纳假设, $a_k>\frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\sin\frac{(k-1)\pi}{n+1}}a_{k-1}$; 在 $(*)$ 中取 $i=k$ 得, $a_{k-1}+a_{k+1}>2a_k\cos\frac{\pi}{n+1}$. 所以

$$a_{k+1}>(2\cos\frac{\pi}{n+1}-\frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{k\pi}{n+1}})a_k=\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{\sin k\pi}{n+1}}a_k.$$

归纳证毕.

取 $k=n-1$ 得, $a_n>\frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n+1}}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+1}}a_{n-1}$. 但在 $(*)$ 中取 $i=n$ 得, $a_{n-1}>2a_n\cos\frac{\pi}{n+1}$, 这与上式矛盾!

综上, 所求实数的最小值为 $2\cos\frac{\pi}{n+1}$. $\square$

评注 (1). 此题是本次考试得分率最低的一道题,约有 10% 做对了此题. 此

题是由 2013 年罗马尼亚国家队选拔试题改编而来:

已知 n 为正整数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数, 证明:

$$\min\left\{x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right\} \leq 2\cos\frac{\pi}{n+2}$$
$$\leq \max\left\{x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right\}.$$

(2). 本题的难点在于如何求出常数 c. 也可以通过设最佳常数为 $c = c(n)$, 考虑使所有题中所有不等式均成立的 $(a_1, \cdots, a_n)$, 可得 $c(2) = 1, c(3) = \sqrt{2}, c(4) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, c(5) = \sqrt{3}$, 从而猜测 $c(n) = 2\cos\frac{\pi}{n+1}$. 也可以利用构造数列计算常数 c:

解 (雅礼中学 覃俊卓)

构造数列 $\{a_n\}$: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = ca_k - a_{k-1}(k = 1, 2, \ldots, n)$, 且 $a_{n+1} = 0$ (c 为待定的正常数).

解特征方程 $x^2 - cx + 1 = 0$ 得两复数根 $\alpha = \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}, \beta = \frac{c-\sqrt{c^2-4}}{2}$. 故可设 $a_k = A\alpha^n + B\beta^n$. 令 $n = 0, n = 1$ 可得

$$\begin{cases} A + B = a_0 = 0, \\ A \cdot \dfrac{c+\sqrt{c^2-4}}{2} + B \cdot \dfrac{c-\sqrt{c^2-4}}{2} = 1. \end{cases}$$

从而有 $A = \frac{1}{\sqrt{c^2-4}}, B = -\frac{1}{\sqrt{c^2-4}}$. 又由 $a_{n+1} = 0$ 知, $\alpha^{n+1} = \beta^{n+1}$, 注意到 $\alpha\beta = 1$, 故有 $\alpha^{2(n+1)} = 1$. 这说明 α 是 $2(n+1)$ 次单位根, 所以有

$$\alpha = \cos\frac{r\pi}{n+1} + i\sin\frac{r\pi}{n+1}, r = 0, 1, \cdots, 2n-1.$$

为了使 c 较大, 可取 $r = 1$(当 $r = 0$ 时, $c = 2$ 不满足要求), 有 $\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2-4}}{2} = \cos\frac{\pi}{n+1} + i\sin\frac{\pi}{n+1}$, 故 $c = 2\cos\frac{\pi}{n+1}$. □

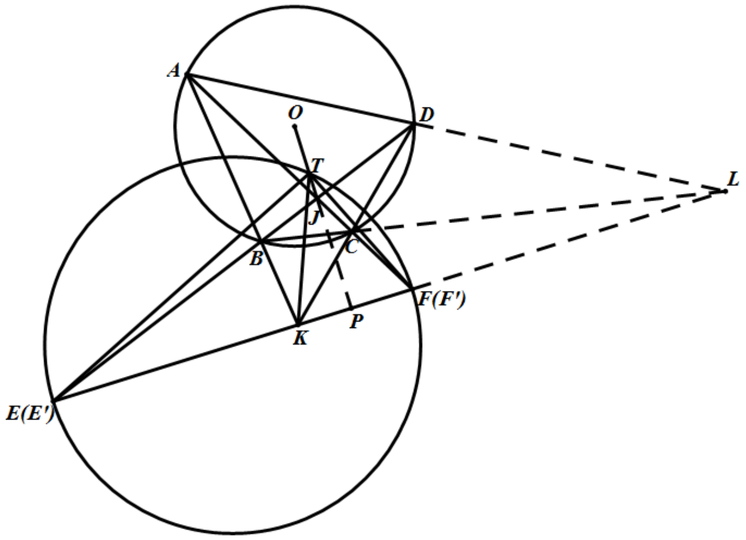
题 5. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 且 $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. 直线 AB, CD 交于 K. AC, BD 交于 J (O, J 不重合). 过 K 作 OJ 的垂线, 分别与直线 BD, AC 交于 E, F. 以 EF 为直径的圆与线段 OJ 交于 T. 证明: KT 平分 $\angle ETF$.

证明 由于 $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. 故 $ABCD$ 为调和四边形.

于是设 B 关于 $\odot O$ 的切线与 D 关于 $\odot O$ 的切线交于 F', 则 F', C, A 共线.

设 C 关于 $\odot O$ 的切线与 A 关于 $\odot O$ 的切线交于 E'. 则 E', B, D 共线.

延长 AD, BC 交于 L. 对退化的六边形 $ABCCDA$ 运用 Pascal 定理得 K, F', L 共线, 同理有 E', K, L 共线, 故 E', F', K, L 共线.



由 Brocard 定理知 $OJ \perp KL$, 从而有 $OJ \perp E'F'$, 结合题设知 $E = E'$, $F = F'$.

连接 EA, EC, 则其为 $\odot O$ 切线. 同样地连接 FB, FD, 则 FB, FD 为 $\odot O$ 切线. 延长 OJ 交 EF 于 P. 则 $TP \perp EF$.

又 T 在以 EF 为直径的圆上, 所以 $\angle ETF = 90°$. 因此 $ET^2 = EP \cdot EF$.

又 $\angle OBF = \angle ODF = 90°$, $\angle OPF = 90°$, 所以 O, B, P, F, D 五点共圆, 即 B, D, F, P 共圆, 从而 $EB \cdot ED = EP \cdot EF = ET^2$. 又 $EB \cdot ED = EA^2 = EC^2$, 所以 $EA = EC = ET$. 同理有 $FB = FD = FT$.

由梅涅劳斯定理, $\frac{ED}{DJ} \cdot \frac{JC}{CF} = \frac{EK}{KF}$.

又 FB, FD 为切线, 所以 (F, C, J, A) 为调和点列. 故 $\frac{JC}{CF} = \frac{JA}{AF}$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{ED}{DJ} \cdot \frac{JC}{CF} = \frac{ED}{DJ} \cdot \frac{JA}{AF} &= \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADJ}} \cdot \frac{S_{\triangle ADJ}}{S_{\triangle ADF}} \\ &= \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE}{AD \cdot DF \cdot \sin\angle FDA}.\end{aligned}$$

注意到 $\angle DAE = \angle FDA$. 故

$$\frac{ED}{DJ} \cdot \frac{JC}{CF} = \frac{AE}{DF} = \frac{ET}{FT}.$$

所以 $\frac{EK}{FK} = \frac{ET}{FT}$, 故 KT 为 $\angle ETF$ 平分线.

即原题证毕. □

评注 此题是较难的几何题, 约有 25% 的同学做对了此题. 此题的关键是要发现 EA, EC, FB, FD 是圆的切线, 即 EF 是 J 关于圆的极线. 此题是合成题, 需要对圆的一些基本图形和基本性质比较熟悉 (Brocard 定理, 切线性质, 调和点列), 如果对这些性质比较熟悉, 这个题目是不难做出来的.

题 6. 给定正整数 $m, n\ (1 \le m \le n)$, 在 $m \times n$ 棋盘 M 的每个方格中填上 1 或 -1, 然后进行如下操作: 将同行 (或同列) 的每个数都同时加上 1.

如果最初棋盘 M 中恰有 r 个 1, 求所有的正整数 r, 使无论最初 r 个 1 填在哪些方格中, 都不能通过有限次操作使各数变得相等.

解法一 记数表 $M = (a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 表示 M 的位于第 i 行第 j 列格上的数, $a_{ij} = 1$ 或 $-1\ (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$.

若 $m \mid r$, 设 $r = mk$, 则可将 M 的 k 格列都填 1, 其余列都填 -1, 此时, 将填 -1 的列都操作 2 次, 各数都变成 1, 矛盾.

所以 $m \nmid r$. 同理, $n \nmid r$.

反之, 当 $m \nmid r$, 且 $n \nmid r$ 时, 最初的棋盘 M 必定有一行数不全同号, 也必有一列数不全同号 (否则与假设矛盾).

假定第 i 行不全同号, 在该行中任取一个 1, 设为 $a_{ij} = 1$.

(1) 如果第 i 行存在一个这样的 "-1": 它所在的列不全为 -1, 则不妨设 $a_{it} = -1\ (t \ne j)$, $a_{st} = 1\ (s \ne i)$.

令 $A = \{a_{ij}, a_{st}\}$, $B = \{a_{it}, a_{st}\}$, $S_A = a_{ij} + a_{st}$, $S_B = a_{it} + a_{sj}$, 定义 $f(M) = S_A - S_B$.

记考察任意一次操作, 它使 S_A、S_B 同时增加 1, 或都不变, 所以 $f(M)$ 在操作中保持不变.

假设通过有限次操作, 使数表 M 中的每个数都变成 c, 则对最终的数表 M_2, 有 $f(M_2) = (c + c) - (c + c) = 0$.

但对最初的数表 M_1, $f(M_1) = (1 + 1) - (-1 + a_{sj}) = 3 - a_{sj} \ne 0$, 故目标不能实现.

(2) 如果第 i 行每个 "-1" 所在的列全为 -1, 则第 i 行必有一个这样的 "1": 它所在的列不全为 1, 不妨设 $a_{ir} = 1$, $a_{pr} = -1\ (i \ne p)$.

在第 i 行任取一个 -1, 设 $a_{iq} = -1\ (q \ne r)$, 由于它所在的列全为 -1, 有 $a_{pq} = -1$.

令 $A = \{a_{ir}, a_{pq}\}$, $B = \{a_{iq}, a_{pr}\}$, $S_A = a_{ir} + a_{pq}$, $S_B = a_{iq} + a_{pr}$, 定义 $f(M) = S_A - S_B$.

记考察任意一次操作, 它使 S_A、S_B 同时增加 1, 或都不变, 所以 $f(M)$ 在操作中保持不变.

假设通过有限次操作, 使数表 M 中的每个数都变成 c, 则对最终的数表 M_2, 有 $f(M_2) = (c + c) - (c + c) = 0$.

但对最初的数表 M_1, $f(M_1)=(1-1)-(-1-1)=2\neq 0$, 故目标不能实现.

综上所述, 所求 r 是一切不为 m 的倍数且不为 n 的倍数的正整数. $\square$

解法二 (成都外国语中学 覃瀚林) 若存在一个 $m\times n$ 的棋盘 M 中有 r 个数为 1, 且对 i 行操作了 a_i, 第 j 行操作了 b_j 次后, 得到的棋盘中各数均为 k, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$. 从而有, $k-a_i-b_j\in\{-1,1\}$, $\forall 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$. 设 m_{ij} 为最初棋盘上第 i 行第 j 列的元素.

对于给定的 a_i, 则 b_j 只有两种取值 $b, b+2$; 对于给定的 b_j, 则 a_i 只有两种取值 $a, a+2$.

注意到对所有行或所有列各操作一次, 不影响结果. 故不妨设 $\min\{a_i\}=\min\{b_j\}=0$; 注意到交换两行或者两列也不改变结果, 故可设 $a_1=\cdots=a_s=2, a_{s+1}=\cdots=a_m=0$; $b_1=\cdots=b_t=2, b_{t+1}=\cdots=b_n=0$.

注意到 $m_{ij}(1\leq i\leq s, 1\leq j\leq t)$ 增加了 4, $m_{ij}(s+1\leq i\leq m, t+1\leq j\leq n)$ 保持不变, 且最初棋盘上的数为 1 或 -1, 故若 $0<s<m$ 且 $0<t<n$, 则有 $m_{11}+4=m_{mn}$, 这与 $m_{ij}\in\{-1,1\}$, $\forall 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$ 矛盾. 故 $s\in\{0,m\}$ 或 $t\in\{0,n\}$. 又 $\min\{a_i\}=\min\{b_j\}=0$, 故有 $s\neq m$ 或者 $t\neq n$, 从而 $s=0$ 或 $t=0$.

1) 当 $s=0$ 时, 此时有 tm 个 $k-2$, $(n-t)m$ 个 k, 故 $r=(n-t)m$, 即 $m\mid r$.

2) 当 $t=0$ 时, 同理有 $n\mid r$.

上面说明了当 $n\nmid r$ 且 $m\nmid r$ 时,满足要求. 下面说明 $n\mid r$ 或 $m\mid r$ 均不满足要求.

若 $m\mid r$, 设 $r=mk$, 则可将 M 的 k 格列都填 1, 其余列都填 -1, 此时, 将填 -1 的列都操作 2 次, 各数都变成 1, 矛盾.

所以 $m\nmid r$. 同理, $n\nmid r$.

综上所述, 所求 r 是一切不为 m 的倍数及 n 的倍数的正整数. $\square$

评注 此题是较难的组合题, 约有 15% 的同学做对了此题. 解 1 的难点在于, 要发现一个“矩形”, 其 4 角方格不全同号, 且存在位于同一对角线的角上方格同号, 由此定义特征函数:$f(M)=(a_{ij}+a_{st})-(a_{it}+a_{sj})$.

解法二利用交换两行或两列不改变最后的结果这一性质, 将 -1 这一特殊的元素”移”到了方阵的左上方, 再取 a_{11} 和 a_{mn} 这两个特殊元比较后得到结果. 事实上, 此时 a_{m1}, a_{1n} 相等, 故本质上也是利用了特征函数的想法.

致谢 感谢罗振华老师仔细审阅了此文, 并给出了宝贵的建议.