数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

帕斯卡定理及其它

欧阳泽轩

(浙江省温州中学, 325014)

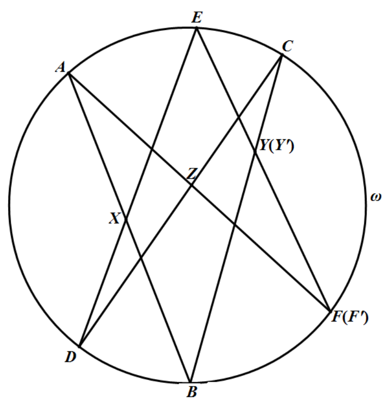
在几何中, 有一些关于三点共线、三线共点的定理. 本文主要讲帕斯卡定理的一些应用, 偶尔涉及笛沙格定理.

在解题方面, 这两个定理都具有极大的能动性, 帕斯卡定理中圆上六点的排法有很多种, 而且经常需要自己再找几个点, 和题中的点组成六边形, 而笛沙格定理中点、线的选取也有很多种方式. 所以想要应用好这两个定理有一定难度, 光是意识到用这两个定理就不太容易, 个人认为在圆上点较多的情况, 甚至只要出现圆的两条弦的交点就可以尝试用帕斯卡定理. 在应用时往往需要很多尝试, 还需要一些创造性的想法. 使用这两个定理的解答往往较短, 但有些却具有很高的实质难度.

关于帕斯卡定理的证明, 这里不再给出 (帕斯卡定理用角元塞瓦证明比传统的用梅涅劳斯定理的证明快很多).

在下文中, 由六条折线首尾相接而成的图形都称为六边形. 取两直线交点时, 两直线平行的情况将略去, 将三线平行也看做交于一点 (参照《近代欧氏几何学》中无穷远点的概念).

引理 1. A, B, C, D, E 为圆 ω 上五点, F 为平面上一点, 若 AB, DE 的交点 X, BC, EF 的交点 Y, CD, FA 的交点 Z 三点共线, 则 F 也在 ω 上.



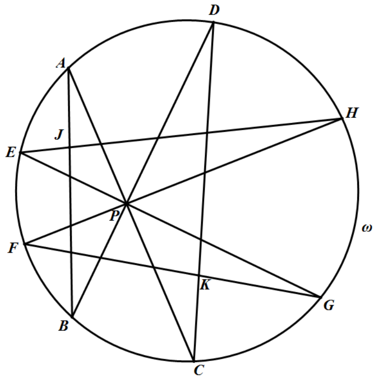
证明 设 ω 与 AZ 交于 F', EF' 与 BC 交于 Y'. 对六边形 $ABCDEF'$ 使用帕斯卡定理得 X, Y', Z 三点共线. 故 Y 与 Y' 都为 XZ 与 BC 的交点, 它们重合, 故 F 与 F' 也重合, 即 F 也在 ω 上. □

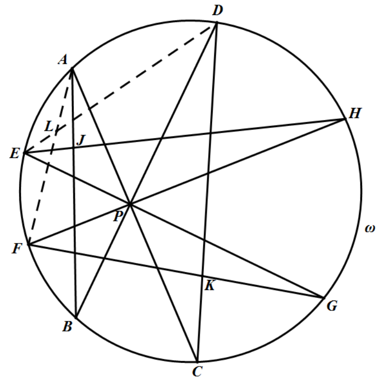
引理 1 也可用同一法证. 由引理 1 可知, 帕斯卡定理对于一般的二次曲线都是成立的. 五点确定一个二次曲线, 因此如果三点共线已经成立, 有五点已经

收稿日期: 2017-12-28; 修订日期: 2018-01-24.

共曲线, 则第六点也在该曲线上. 帕普斯定理其实是帕斯卡定理中二次曲线退化为两条直线的情况.

例 1. *A,B,C,D,E,F,G,H 为圆 ω 上八点, AC,BD,EG,FH 交于一点 P, AB,EH 交于点 J, CD,FG 交于点 K. 证明: J,P,K 三点共线.*





证明 设 AF,DE 交于 L. 对六边形 $AFHEDB$ 使用帕斯卡定理得 L, J, P 三点共线. 对六边形 $AFGEDC$ 使用帕斯卡定理得 L,P,K 三点共线. 故 J,P,K 三点共线. □

评注 这题的解答看似简单, 实则不易. 如果用帕斯卡证明本题, 主要的难点在于怎么找帕斯卡定理中的六个点, 以及六点怎么排序, 个人认为选取 6 条折线, 依次经过 (每点各两次) 想要证明共线的三点比较好, 当然这个过程中可能要加较多的辅助线来满足定理的条件, 也可能我们需要再找出一点凑成三点共线.

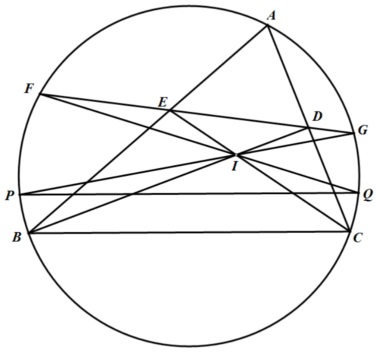
比如在本题中, 我们希望证明 JPK 共线, 不如从 A 点出发, $A-(J)-B-(P)-D-(K)-C-(J)-$? 可以预见的是这样作出的六边形有很多没有在原图中出现的点和线, 若是只有一两条还可以作出来先看一看, 太多了就要考虑其他的六边形.

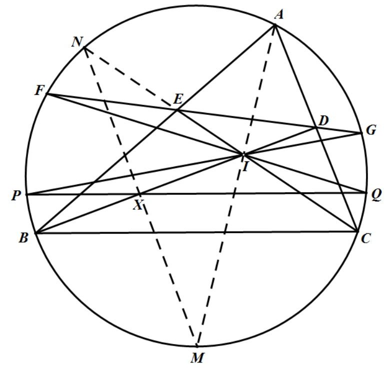
我们希望将 C 换掉, 可以先不经过 K, 但要使得可以通过已知的点和线依次经过 J,P, 换成 E 是很好的选择, 这时变成 $A-(J)-B-(P)-D-(?)-E-(J)-H-(P)-F-(?)-A$. 虽然在原图中未出现, 但将其设出后, 下一个帕斯卡是很容易应用的. 问题立刻就得到解决.

在某些题目中选恰当的点作为六边形的起始点是很重要的, 通常需要一些尝试.

从这道题可以看出: *若 P 为定点, AC,BD 为过 P 点的两条弦, 若 AB 过定点 J, 则 CD 过定点 K.* 这作为一个引理相当好用, 下面的例 2 就可以用例 1 的结论做.

例 2. $\triangle ABC$ 中, I 为内心. BI, AC 交于 D, CI, AB 交于 E. DE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆与两点 G, F. GI, FI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一个交点分别为 P, Q. 证明: PQ 为 $\triangle IBC$ 的中位线.





证明 设 IB 中点为 X, 设 AI, CI 分别交 $\triangle ABC$ 外接圆于 M, N.

由熟知的性质, $MI = MB$, $NI = NB$. 故 NM 为 IB 中垂线, 它过 IB 中点 X.

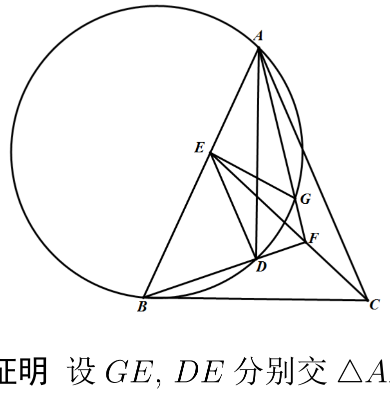
由例 1, MN 与 PQ 的交点在直线 ID 上, 故它就是 X, 即 PQ 过 IB 中点.

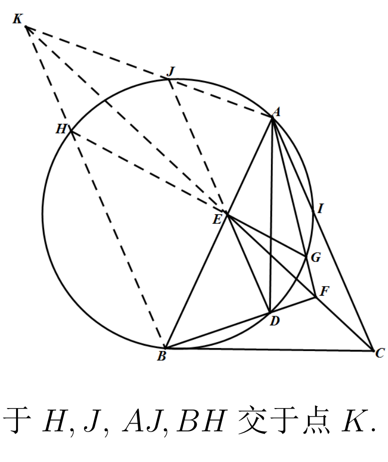
同理 PQ 过 IC 中点, 故 PQ 为 $\triangle IBC$ 的中位线. □

评注 首先不难发现只要证明 PQ 过 IB 中点 X. 再运用内心的性质刻画出 X 的性质, 最后应用例 1.

其实作出辅助线后, 将 B 点及其连出的线都去掉, 就和例 1 一模一样, 如果熟悉例 1, 做例 2 的时候就很容易联想到例 1.

例 3. $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 $\angle BAC$ 平分线上一点, E 在 AB 上, 满足 $DE \parallel AC$, BD 交 CE 于 F, AF 交 $\triangle ADB$ 外接圆于 G. 证明: $\angle AGE = \angle BAC$.





证明 设 GE, DE 分别交 $\triangle ADB$ 外接圆于 H, J, AJ, BH 交于点 K.

对六边形 $JDBHGA$ 使用帕斯卡定理得 E, F, K 共线.

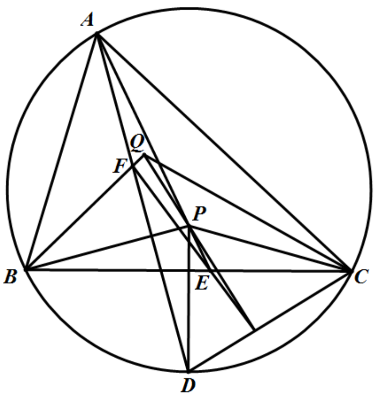
又 $\angle ABJ = \angle ADJ = \angle DAI = \angle BAD = \angle BJD$, 故 $EJ = EB$.

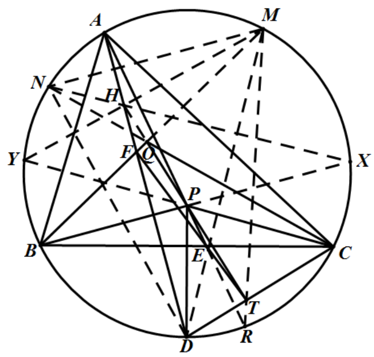
由于 $DE \parallel AC$, $EJ = EB$, $AC = AB$, 故 $\frac{JK}{AK} = \frac{JE}{AC} = \frac{EB}{AB}$.

故 $BK \parallel DE$, 即 $BK \parallel AC$, 因此 $\widehat{AH}$ 与 $\widehat{BI}$ 相等, 即 $\angle AGE = \angle BAC$. $\square$

评注 要求 $\angle AGE$ 容易想到圆周角, 故作出 H, 此时圆上已有 5 点, 联想到帕斯卡定理, 注意到图中只有 E, F 为弦交点, 经过尝试, 我们从 J 开始找 6 个点 $J-(E)-D-(F)-B-(?)-?$ 第二个? 最好能通过已知的线段依次通过 E, F, 经过尝试, 我们得到 $J-(E)-D-(F)-B-(K)-H-(E)-G-(F)-A-(K)-J$ 接下来只要证明 KB 平行 AC 即可.

例 4. $\triangle ABC$ 中, D 为弧 $\widehat{BC}$ (不含 A) 的中点, P 为 BC 中垂线上一点, $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 的角平分线交于 Q, AP 交 BC 于 E, BQ 交 AD 于 F. 证明: EF, PQ, CD 三线共点.





证明 设 AP, BP, CP, BQ, CQ 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 R, X, Y, M, N, MR, CD 交于 T.

易知 M, N, D 分别为弧 $\widehat{AX}, \widehat{AY}, \widehat{XY}$ 的中点, 故弧 $\widehat{ND}$ 加上弧 $\widehat{AM}$ 正好是半个圆周, 故 $AD \perp NM$, 同理 $NX \perp DM$, $MY \perp ND$.

故 NX, MY, AD 共于 $\triangle MND$ 的垂心 H.

对六边形 $MBCDAR$ 使用帕斯卡定理得 F, E, T 共线.

对六边形 $DCYMRA$ 使用帕斯卡定理得 T, P, H 共线.

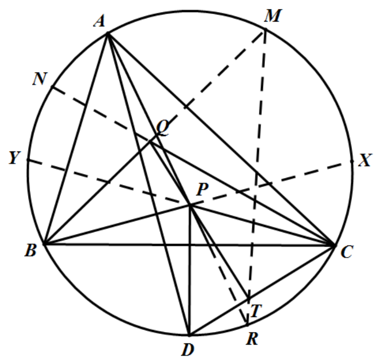
对六边形 $MYCNXB$ 使用帕斯卡定理得 H, P, Q 共线.

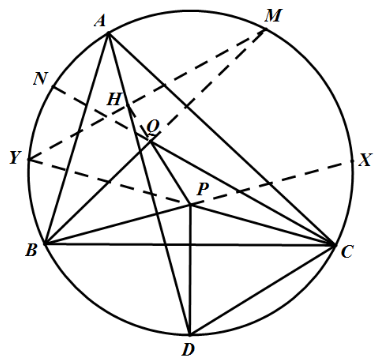
故 EF, PQ, CD 三线交于 T. $\square$

评注 本题三次使用帕斯卡定理, 一开始, 通过角平分线联想到弧中点, 这样圆上就产生了很多点, 又有很多弦交点, 自然想到帕斯卡定理.

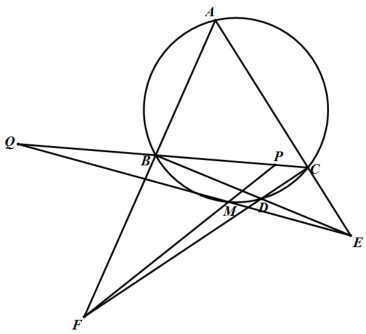
实际上, 每次使用帕斯卡都简化了题目, 比如得到 F, E, T 共线之后, 我们可将 E, F 去掉 (如图) 只需证明 T, P, Q 三点共线, 得到 T, P, H 共线之后, 我们可将 T 去掉, 只需证明 H, P, Q 共线, (这里 H 是 AD 与 YM 的交点) 不难发现只需证明 N, H, X 共线, 再用帕斯卡定理即可, N, H, X 共线可直接由塞瓦导出,

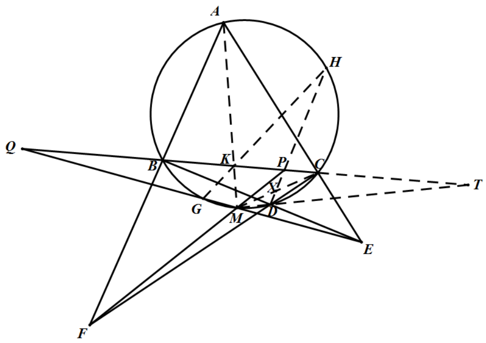
或者利用垂心. 这样我们利用帕斯卡定理一步步化繁为简, 最终解决了问题.





例 5. 完全四边形 $ABCDEF$ 中, $ABCD$ 共圆, M 为弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 的中点, EM, FM 分别交 BC 于 Q, P. 证明: A, P, Q, D 四点共圆.





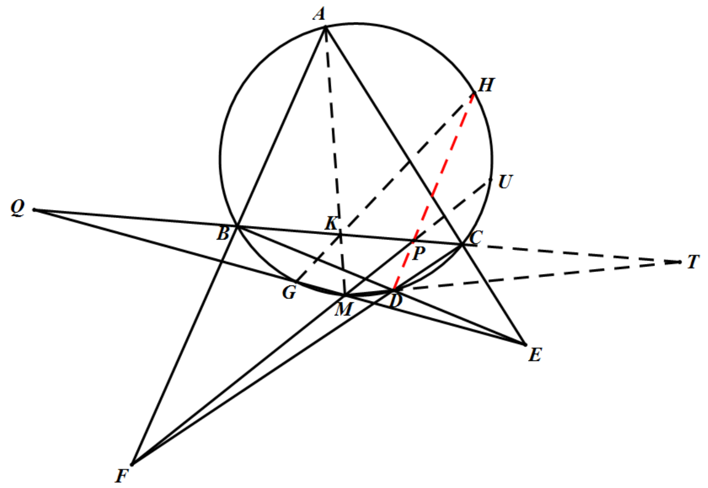
证明 设 MQ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 G, MA, MD 分别与 BC 交于 K, T, GK, CM 分别与 DP 交于 H, X.

由于 AB, PM, CD 交于一点 F, 故 $\triangle BPD$ 与 $\triangle AMC$ 成透视, 故 K, X, E 共线. 从而考虑六边形 $GMCBDH$, 由引理 1, H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

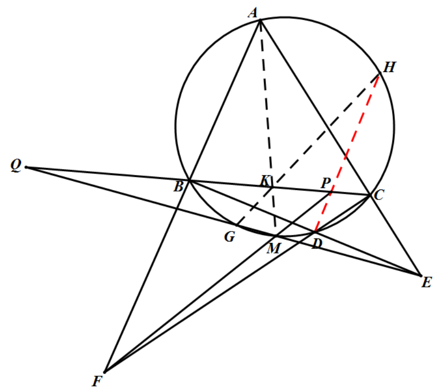
由于 M 为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点, 故 $\angle MBK = \angle MCB = \angle MAB$, 从而 $\triangle MBK$ 与 $\triangle MAB$ 相似, 即 $MB^2 = MK \cdot MA$.

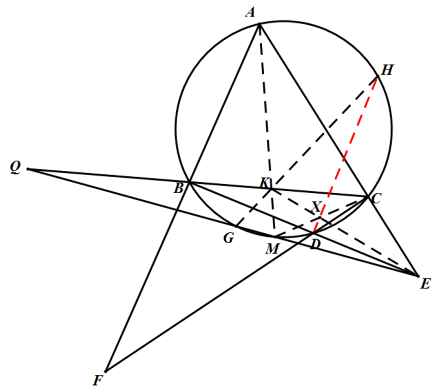
类似可知 $MB^2 = MG \cdot MQ = MK \cdot MA = MD \cdot MT$. 故 A, K, G, Q 与 A, K, D, T 分别共圆. 因此 $\angle QAD = \angle QAM + \angle DAM = \angle MGK + \angle KTD = \angle PDT + \angle KTD = \angle QPD$. 故 A, P, Q, D 四点共圆. □

评注 这题几乎无从下手, 具有相当的难度. 既然有弧中点出现, 我们不妨作出 MA, MD 与 BC 的交点 MP, MQ, 与圆的另一个交点 (如图, 下图中 H 为 GK 与圆的交点), 实际上这相当于以 M 为圆心, MB 为半径将 A, P, Q, D 四点反演, 这时会有非常好的性质出现, 比如多组四点共圆, 方便我们导角, 易知 $\angle QAD = \angle QAM + \angle DAM = \angle MGK + \angle KTD = \angle HDT + \angle PTD$. 它应等于 $\angle QPD (= \angle PDT + \angle PTD)$. 因此, 若结论成立, 则必有 HPD 共线.



下面, 我们将多余的点去掉 (左下图), 要证明 H, P, D 三点共线. 在图中, G, P, H 的性质我们目前还很陌生, 为此, 我们需要刻画其中某些点的性质, 经过尝试, 我们选择刻画 P 的性质, P 是 FM 与 BC 的交点, 这就有 $\triangle BPD$ 与 $\triangle AMC$ 成透视, 而这两个三角形三个对应边的交点中有两个是已知点! 设 KE, CM 交于 X, 则 X, K, E 共线, 这样我们只要证明 D, X, H 共线 (这时我们可以将 P 擦除), 这由帕斯卡定理是显然的.





总结一下, 第一步将命题转化为证共线或许需要经历很多失败的尝试才能发现, 并不容易, 然后是刻画 P 的性质, 应当注意, 解题时需要用到题目中所有有用的条件, 比如这题中 P, M, F 共线其实就是一个必不可少的条件, 如果思路陷入了死胡同, 有可能是忽视了一个显然的条件, 导致无论用什么方法也没有效果.