数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

函数方程问题的一些方法

施奕成

(华中师范大学第一附属中学, 430223)

函数方程是一类比较有趣的代数问题, 也是近几年 IMO 的常考题型 (2015 年第 5 题, 2017 年第 2 题). 本文介绍一些函数方程问题的解题方法.

笔者认为, 对于一般的函数方程问题, 有以下几种思考方向:

(1) 考虑一些特殊值. 比如 $f(0), f(1), f(-1)$ 之类. 可先将其求出, 再代入到原函数方程中, 可以得到一些有用的结论.

(2) 考虑函数的一些特殊性质. 比如考虑 f 是否为单射, 满射. f 是否为奇函数等性质.

(3) 考虑所给函数方程的形式. 通过式子形式来选择用什么方法去做, 比如, 若所给式子形式为柯西方程的形式, 那么应尽可能地去凑出柯西方程的条件(单调性, 连续性).

下面介绍几种函数方程问题的方法.

I. 合理代入特殊值

题 1. *求函数* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *使得对任意* $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y. \tag{1}$$

解 固定 x, 取 y 使得

$$f(x)+y=x^2-y,$$

即 $y=\frac{x^2-f(x)}{2}$, 则此时

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y).$$

故对任意 $x\in\mathbb{R}$,

$$2f(x)(x^2-f(x))=0.$$

则对任意 $x\in\mathbb{R}, f(x)=0$, 或 $f(x)=x^2$. 于是 $f(0)=0$.

收稿日期: **2018-01-17;** 修订日期: **2018-02-21.**

若有 $a\neq 0, f(a)=0$, 在 (1) 中令 $x=0, x=a$, 可分别得出

$$f(y)=f(-y) \text{ 及 } f(y)=f(a^2-y).$$

故

$$f(y)=f(-y)=f(a^2+y),$$

即 a^2 为 f 的周期.

由 (1), 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$f(f(x)+y+a^2)=f(x^2-y-a^2)+4f(x)(y+a^2).$$

又

$$f(f(x)+y+a^2)=f(f(x)+y), f(x^2-y-a^2)=f(x^2-y),$$

故

$$4f(x)(y+a^2)=4f(x)y.$$

故 $a^2f(x)=0$. 又 $a\neq 0$, 因此 $f(x)=0. \forall x\in\mathbb{R}$.

故综上可知 $f(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 或 $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

经检验, 上述两解符合题意. □

注 本题最重要的地方就是观察 (1) 后, 发现代入特殊的 y 可使得两个麻烦的式子 $f(f(x)+y)$ 及 $f(x^2-y)$ 都被消掉, 后面就简单了.

题 2. *求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对于任意实数 x,y, 有*

$$f(f(x)f(y))+f(x+y)=f(xy). \tag{1}$$

解 令 $x=y=0$, 则 $f(f^2(0))=0$.

考虑 $z\in\mathbb{R}, f(z)=0$. (由上式, 这样的 z 存在)

若 $z=0$, 在 (1) 中令 $y=0$, 则

$$f(x)=0, \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

若 $z\neq 0,1$, 在 (1) 中令 $x=z, y=\frac{z}{z-1}$, 这样有 $x+y=xy$. 故

$$f(f(z)f(\frac{z}{z-1}))=0.$$

故 $f(0)=0\Rightarrow f(x)=0, \ \forall x\in\mathbb{R}$.

下面假设满足 $f(z)=0$ 的实数 z 仅 $z=1$, 那么

$$f^2(0)=1\Rightarrow f(0)=\pm 1.$$

$f(0)=-1$ 时, 在 (1) 中令 $y=1$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$f(x+1)=f(x)+1. \tag{2}$$

下证 f 为单射, 若存在 $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\neq x_2,f(x_1)=f(x_2)$.

首先, 有结论 $f(x)=-1$ 的解为

$$x=0. \tag{3}$$

这是因为由 (1) 可知 $f(x+1)=0\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0$.

取 $N\in\mathbb{N}_+$, 使 $(x_1+N+1)^2>4(x_1+N)$. 则必有 $x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}$,

$$x+y=x_1+N+1,xy=x_2+N.$$

于是取这样的 (x,y) 代入 (1) 有

$$f(f(x)f(y))+f(x_1+N+1)=f(x_2+N).$$

由 (2) 易知

$$f(x_1+N+1)=N+1+f(x_1),f(x_2+N)=f(x_2)+N.$$

结合 $f(x_1)=f(x_2)$, 有 $f(f(x)f(y))=-1$. 由 (3) 知 $f(x)f(y)=0$.

不妨设 $f(x)=0\Rightarrow x=1$. 故 $y=x_1+N$, 因此 $x_1+N=x_2+N\Rightarrow x_1=x_2$, 矛盾. 故 f 为单射.

此时在 (1) 中令 $y=0$, 有

$$f(-f(x))+f(x)=-1. \tag{4}$$

在 (4) 中令 $x=-f(x)$, 有

$$f(-f(x))+f(-f(-f(x)))=-1. \tag{5}$$

$(4)-(5)$ 有 $f(x)=f(-f(-f(x)))$. 故

$$x=-f(-f(x)), \text{(由单射)} \tag{6}$$

结合 (4) 有 $f(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}$.

$f(0)=1$ 时, 令 $g(x)=-f(x)$, 则

$$g(g(x)g(y))+g(x+y)=g(xy) \text{ 且 } g(0)=-1,g(1)=0.$$

同理可知 $g(x)=x-1$. 故 $f(x)=1-x$.

综上知对任意 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$f(x)\equiv 0 \text{ 或 } f(x)=x-1 \text{ 或 } f(x)=1-x.$$

经检验, 上述三解均合题. $\square$

注 本题的关键即为证明 f 为单射. 而证明单射的方法也是用取特殊值得方法消去一些东西, 从而将式子化到最简.

II. 算二次

题 3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$f(x^2+y+f(y))=2y+f^2(x). \tag{1}$$

解 在 (1) 中令 $x=0$, 得

$$f(y+f(y))=2y+f^2(0).$$

故 f 为满射.

在 (1) 中将 x 换为 $-x$, 有

$$f(x^2+y+f(y))=f^2(-x)+2y,$$

可得 $f^2(-x)=f^2(x)$. 故 $f(-a)=0$.

在 (1) 中令 $x=0,y=a$, 则

$$2a+f^2(0)=f(a+f(a))=f(a)=0.$$

在 (1) 中令 $x=0,y=-a$, 则

$$-2a+f^2(0)=f(-a+f(-a))=f(-a)=0.$$

故

$$2a+f^2(0)=-2a+f^2(0).$$

由此可得 $a=0$. 因此 $f(0)=0$.

在 (1) 中令 $y=0$ 有 $f(x^2)=f^2(x)$. 故 $x\ge 0$ 时,

$$f(x)=f^2(\sqrt{x})\ge 0. \tag{2}$$

故

$$f(x^2+y+f(y))=2y+f(x^2).$$

将 x^2 换为 x 知, $x\ge 0$ 时,

$$f(x+y+f(y))=f(x)+2y. \tag{3}$$

取 $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$, 则

$$f(x)\ge 0,f(y)\ge 0,f(z)\ge 0.$$

考虑 $f(z+x+y+f(y)+f(x+y+f(y)))$. 一方面,

$$f(z+x+y+f(y)+f(x+y+f(y)))=f(z)+2(x+y+f(y)),$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&f(z+x+y+f(y)+f(x+y+f(y)))\\
=&f(z+x+y+f(y)+f(x)+2y)\\
=&f(z+3y+f(y+x+f(x)))\\
=&2x+f(z+3y+f(y))\\
=&2x+2y+f(z+2y).
\end{aligned}$$

比较上两式知

$$f(x)+2f(y)=f(z+2y)\ \ (y\geq 0, z\geq 0).$$

令 $z=0$, 有 $f(2y)=2f(y)$, 故

$$f(z+2y)=f(z)+f(2y)\ \ (z\geq 0, y\geq 0).$$

故对任意 $x\geq 0, y\geq 0$,

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

又 $x\geq 0$ 时, $f(x)\geq 0$, 故

$$f(x+y)\geq f(y).$$

故 f 在 $[0,\infty)$ 上单调不减. 则 $f(x)=cx\ \ (x\geq 0, c=f(1))$. (由柯西方程)

而在 (3) 中令 $x\geq 0, y\geq 0$, 有

$$c(x+y+cy)=cx+2y.$$

故 $c^2y=y\Rightarrow c=\pm 1$, 由 $c\geq 0\Rightarrow c=1$. 故 $x\geq 0$ 时, $f(x)=x$.

若存在 $x_0>0, f(x_0)=f(-x_0)$ 则

$$f(-x_0)=x_0.$$

在 (1) 中令 $x=0, y=-x_0$, 则

$$f(-x_0+f(-x_0))=-2x_0.$$

故 $f(0)=-2x_0$ 可得 $-2x_0=0\Rightarrow x_0=0$ 矛盾.

则由 $f^2(x)=f(x^2)$, 知

$$f^2(x)=f^2(-x),$$

故 $f(x)=-f(-x)$. 因此对任意 $x\in\mathbb{R}, f(x)=x$.

经检验 $f(x)=x\ \ (x\in\mathbb{R})$ 合题. □

注 本题困难之处在于 (1) 中 $f(x^2+y+f(y))$ 并不能好处理. 而添加一个

变量算二次后则可将一个很复杂的式子变为两个不同形式的简单式子, 从而得到关键讨论.

题 4. 求所有的 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使对任意 $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f(x+y)=f(x)f(y)f(xy). \tag{1}$$

解 对任意 $x,y,z\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+y+z)&=f(x+y)f(z)f((x+y)z)\\ &=f(z)f(x)f(y)f(xy)f(xz+yz)\\ &=f(x)f(y)f(z)f(xy)f(yz)f(zx)f(xyz^2), \qquad (2)\\ f(x+y+z)&=f(x+z)f(y)f(xy+zy)\\ &=f(y)f(x)f(z)f(xz)f(xy)f(zy)f(xy^2z). \qquad (3)\end{aligned}$$

若存在 $x_0\in\mathbb{R}, f(x_0)=0$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(x-x_0)f(x_0)f((x-x_0)x_0)=0.$$

若对任意 $x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0$, 则由 (2) (3) 知,

$$f(xyz^2)=f(xy^2z).$$

取 $y\neq 0, z\neq 0, z=\frac{1}{yz}$, 则 $f(y)=f(z)$.

故对 $x\neq 0, f(x)=c$ (c 为常数), 由 (1) $c^3=c\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm 1$ (由于 $c\neq 0$). 而

$$f(0)=f(x)f(-x)f(-x^2)=c^3=c\ (x\neq 0).$$

综上对 $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)\equiv 0 \quad \text{或} \quad f(x)\equiv 1 \text{ 或} f(x)\equiv -1.$$

经检验, 上述三解符合题. □

注 本题的条件式并不算太复杂, 但若按一般方法去代入特值会讨论地有些麻烦. 这里添加一个变量 z 算二次可以充分利用本题的对称性消去大部分式子从而得到 $f(xyz^2)=f(xy^2z)$.

题 5. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}_+$,

$$f(x+y+f(y))=4030x-f(x)+f(2016y). \tag{1}$$

解 记 $A=f(1)+1, B=f(2016)$.

在 (1) 中令 $y=1$ 有

$$f(x+A)=4030x-f(x)+B,$$

下考虑 $f(x+A+y+f(y))$. 一方面

$$\begin{aligned}f(x+A+y+f(y))&=4030(x+y+f(y))-f(x+y+f(y))+B\\&=4030(x+y+f(y))-4030x+f(x)-f(2016y)+B\\&=4030y+4030f(y)+f(x)-f(2016y)+B.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}f(x+A+y+f(y))&=4030(x+A)-f(x+A)+f(2016y)\\&=4030(x+A)-4030x+f(x)-B+f(2016y)\\&=4030A+f(x)-B+f(2016y).\end{aligned}$$

综合上两式知

$$f(2016y)=2015(y+f(y))+B-2015A. \tag{$*$}$$

在 (1) 中令 $x=1$ 有

$$\begin{aligned}f(1+y+f(y))&=4030-f(1)+f(2016y)\\&=2015(y+f(y)+1)+2015-f(1)+B-2015A.\end{aligned}$$

故对任意 $x\in\mathbb{R}_+$,

$$f(x+f(x)+1)=2015(x+f(x)+1)+c\ \ (c\text{ 为常数}). \tag{2}$$

又在 (1) 中令 $x=2016y$, 知

$$f(2017y+f(y))=4030\cdot 2016y.$$

故 f 为 $\mathbb{R}_+$ 上满射.

而由 $(*)$ 知,

$$1+\frac{f(2016y)+2015A-B}{2015}=y+f(y)+1.$$

又对任意 $y>0$, 存在 $y_0, f(2016y_0)=y$.

故对任意 $x>1+\frac{2015A-B}{2015}$ (即 $1+\frac{2015A-B}{2015}=\lambda$), 即对任意 $x>\lambda$ (λ 为常数), 存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 使 $x_0+f(x_0)+1=x$.

结合 (2) 知, 对 $x>\lambda, f(x)=2015x+c$.

不妨设 $\lambda>0$ (若 $\lambda\le 0$ 本题已解决), 取 $y>10^{10}\lambda+10^{10}k, x>\lambda$.

$$f(x+y+2015y+c)=4030x-f(x)+2015(2016y)+c.$$

故

$$2015(x+y+2015y+c)+c=4030x-2015x-c+2015\cdot 2016y+c.$$

故 $2016c=0$, 因此 $c=0$.

在 (1) 中取 $y>10^{10}\lambda+10^{10}k$, 对 $x\le\lambda$, 有

$$2015(x+y+2015y)=4030x-f(x)+2015\cdot 2016y.$$

从而 $f(x)=2015x$. 故对任意 $x\in\mathbb{R}_+, f(x)=2015x$.

经检验, 此解合题. $\square$

III. 利用极限解决函数方程

在某些函数方程题中, 其条件全给一些不等式关系. 此时可以考虑重复某一估计步骤并用极限得出函数方程的解.

题 6. *求所有函数 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, 使得对任意 $k,m,n\in\mathbb{N}^*$, 有*

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn)\ge 1.$$

解 令 $k=m=n=1$ 得

$$2f(1)\ge 1+f^2(1),$$

可得 $f(1)=1$.

令 $m=n=1$ 得

$$f(k)+f(k)-f(k)\ge 1.$$

故对任意 $k\in\mathbb{N}_+, f(k)\ge 1$.

令 $k=m=n$ 得

$$2f(k^2)-f(k)f(k^2)\ge 1, f(k^2)(2-f(k))\ge 1.$$

结合对任意 $x\in\mathbb{N}_+, f(x)\ge 1$ 知 $f(k)<2$. 故

$$f(k^2)\ge\frac{1}{2-f(k)}\tag{$*$}$$

下归纳证明: 对任意 $k\in\mathbb{N}_+, \frac{n+1}{n}>f(k)\ge 1$ (n 为任意正整数).

$n=1$ 时, $2>f(k)\ge 1$ 成立.

设对 n 时已成立 ($n\ge 1$), 考虑 $n+1$ 时, 此时由 $(*)$ 有

$$\frac{n+1}{n}>f(k^2)\ge\frac{1}{2-f(k)}.$$

故

$$\frac{2n+2}{n}-\frac{n+1}{n}f(k)>1.$$

因此
$$f(k)<\frac{n+2}{n+1}.$$
从而对 $n+1$ 时结论也成立.

故对任意 $k\in\mathbb{N}_+,n\in\mathbb{N}_+$,
$$\frac{n+1}{n}>f(k)\geq 1.$$
此时取 $n\to+\infty$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 故 $f(k)=1(k\in\mathbb{N}_+)$.

因此 $f(x)\equiv 1(\forall x\in\mathbb{N}_+)$, 经检验合题. □

注 本题所能用的等式条件并不多, 只有一些不等关系. 而在较粗略的估计 $2>f(k)\geq 1$ 后, 便可以发现 $f(k)$ 的范围可不断精确, 由此便可以求极限.

题 7. 求满足以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$

(1) $f(x)\leq 2(x+1)$; (2)$f(x+1)=\frac{1}{x}[f^2(x)-1]$.

解 令 $g(x)=f(x)-x-1$, 则 $-x\leq g(x)\leq x+1$, 且 $g(x+1)=\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)$. 故由
$$\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)=g(x+1)\leq x+2,$$
知
$$(g(x)+x+1)^2\leq x(x+2)+(x+1)^2<2(x+1)^2.$$
故
$$g(x)<(2^{\frac{1}{2}}-1)(x+1).$$
下设 $g(x)<(2^{\frac{1}{2^k}}-1)(x+1)(k\in\mathbb{N}_+)$ 已成立, 则
$$g(x+1)=\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)<(2^{\frac{1}{2^k}}-1)(x+2).$$
故
$$(g(x)+x+1)^2\leq(x+1)^2+(2^{\frac{1}{2^k}}-1)(x+2)x\leq 2^{\frac{1}{2^k}}(x+1)^2.$$
故
$$g(x)<(2^{\frac{1}{2^{k+1}}}-1)(x+1).$$
故对任意 $k\in\mathbb{N}_+$,
$$g(x)<(2^{\frac{1}{2^k}}-1)(x+1).$$
取 $k\to+\infty$ 知 $g(x)\leq 0,x\in[1,+\infty)$.

又

$$g(x+1)=\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)\geq -x-1,$$

故

$$(g(x)+x+1)^2\geq x+1,$$

故

$$g(x)2-x-1+\sqrt{x+1}\geq -x-1+x^{\frac{1}{2}}.$$

(由于 $g(x)\geq -x$ 故 $g(x)\leq -x-1-\sqrt{x+1}$ 不成立.) 故

$$\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)=g(x+1)\geq -x-2+\sqrt{x+1},$$

故

$$(g(x)+x+1)^2\geq 1+x\sqrt{x+1},$$

故

$$g(x)\geq -x-1+\sqrt{1+x\sqrt{x+1}}\geq -x-1+x^{1-\frac{1}{2^k}}.$$

设已有 $g(x)\geq -x-1+x^{1-\frac{1}{2^k}}$ 成立, 则

$$g(x+1)=\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)\geq -(x+2)+(x+1)^{1-\frac{1}{2^k}}.$$

故

$$(g(x)+x+1)^2\geq 1+x(x+1)^{1-\frac{1}{2^k}}>x^{2-\frac{1}{2^k}},$$

故

$$g(x)\geq -x-1+x^{1-\frac{1}{2^{k+1}}}$$

对 $k+1$ 也成立. 故任意 $k\in\mathbb{N}_+$,

$$g(x)\geq -x-1+x^{1-\frac{1}{2^k}},$$

取 $k\to+\infty$ 知 $g(x)\geq -1(\forall x\in[1,+\infty))$,

$$\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)=g(x+1)\geq -1,$$

故

$$(g(x)+x+1)^2\geq x^2+x+1>(x+\frac{1}{2})^2.$$

故 $g(x)\geq -\frac{1}{2}$.

设已有 $g(x)\geq -\frac{1}{2^k}(k\in\mathbb{N}_+)$, 则

$$\frac{1}{x}g(x)(g(x)+2x+2)=g(x+1)\geq -\frac{1}{2^k},$$

故
$$(g(x)+x+1)^2 \geq (x+1)^2-\frac{1}{2^k}x > (x+1-\frac{1}{2^{k+1}})^2.$$
故 $g(x) \geq -\frac{1}{2^{k+1}}$. 故对任意 $k \in \mathbb{N}_+, g(x) \geq -\frac{1}{2^k}$. 取 $k \to +\infty$ 可得 $g(x) \geq 0 (\forall x \in [1,+\infty))$.

综上 $g(x) \leq 0 (x \in [1,+\infty))$ 得 $g(x) \equiv 0 \ (x \in [1,+\infty))$.

故 $f(x)=x+1 \ (x \in [1,+\infty))$.

经检验合题. □

注 本题由条件得到 $g(x)$ 的范围后只用无脑重复估计过程即可得到最佳范围估计 $(0 \leq g(x) \leq 0)$.

IV. **构造多项式**

有时对于函数 f 若可以证 $x \in \mathbb{Q}$ 时 $f(x) \geq x$, 但 $x \notin \mathbb{Q}$ 时无法证明, 可以构造多项式用代数基本定理证明.

题 8. 给定 $k \in \mathbb{N}_+$, $k \geq 2$. 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使对任意 $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且 $f(x^k)=(f(x))^k$.

解 k 为偶数时, $x \geq 0$ 时, $f(x)=(f(x^{\frac{1}{k}}))^k \geq 0$. 故 $x \geq 0, y \geq 0$ 时,
$$f(x+y) \geq f(x),$$
即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调不减. 故由柯西方程 $f(x)=cx\,(c \in \mathbb{R})$. 故 $cx^k=c^kx^k$, 故 $c^k=c \Rightarrow c=0,1$, 因此 $f(x) \equiv 0\,(x \in \mathbb{R})$ 或 $f(x)=x\,(x \in \mathbb{R})$. 经检验合题.

k 为奇数时, 由柯西方法易知对任意 $q_0 \in \mathbb{Q}$,
$$f(q_0x)=q_0f(x)\,(x \in \mathbb{R}).$$
取 $q_0 \in \mathbb{Q}$, 则
$$\begin{aligned}(f(x+q_0))^k &= (f(x)+f(q_0))^k \\ &= f^k(x)+kf^{k-1}(x)f(q_0)+\cdots+f^k(q_0) \\ &= f^k(x)+kq_0f(1)f^{k-1}(x)+\cdots+(q_0f(1))^k,\end{aligned}$$
且
$$\begin{aligned}(f(x+q_0))^k &= f((x+q_0)^k) \\ &= f(x^k+kx^{k-1}q_0+\cdots+q_0^k) \\ &= f^k(x)+kf(x^{k-1}q_0)+\cdots+f^k(q_0) \\ &= f^k(x)+kq_0f(x^{k-1})+\cdots+(q_0f(1))^k.\end{aligned}$$

固定 x, 记

$g(q_0)=(f^k(x)+\cdots+(q_0f(1))^k)-(f^k(x)+kq_0f(1)f^{k-1}(x)+\cdots+(q_0f(1))^k)$.

对任意 $q_0\in\mathbb{Q}, g(q_0)=0$. 故 $g(q_0)$ 每项系数都为 0. (由于 g 为 $\le k$ 次多项式, 而其有无穷多个根) 比较一次项系数有

$$f^{k-1}(x)f(1)=f(x^{k-1}).$$

故对 $x\ge 0$,

$$f(x)=(f(x^{\frac{1}{k-1}}))^{k-1}f(1)$$

恒非负或恒非正. 故可知 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调不减或单调不增, 由柯西方程 $f(x)=cx$ (c 为常数). 由 $f(x^k)=(f(x))^k$ 知 $c^k=c\Rightarrow c=0,\pm1$.

故 k 为奇数时, $f(x)\equiv 0\ (x\in\mathbb{R})$ 或 $f(x)=x\ (x\in\mathbb{R})$ 或 $f(x)=-x\ (x\in\mathbb{R})$.

经检验上述三解合题. $\square$