数学新星问题征解

第二十六期 (2018.03)

主持: 牟晓生

第一题. 给定正整数 n. 已知复数 $z_1, \ldots, z_n$ 的和为零, 求

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i^2 + 1|$$

的最小值.

(西北师范大学附中学生 张江昊 供题)

第二题. 设 p 是除四余一的素数. 证明存在数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 且 $p \nmid a_n$ 对每个 n 成立.

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

第三题. 求最大的常数 λ, 使得对任意正整数 n 以及任意实数 $a_1, \ldots, a_n$, 只要 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = 0$, 就有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^4 \geq \frac{\lambda}{n^3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^4.$$

(上海中学学生 张盛桐 供题)

第四题. 给定平面上无三点共线的 10^{2018} 个点. 证明可以从中找出 10^{670} 个点, 它们两两间的距离互不相等.

(哈佛大学 牟晓生 供题)