一道新星几何测试题的探讨

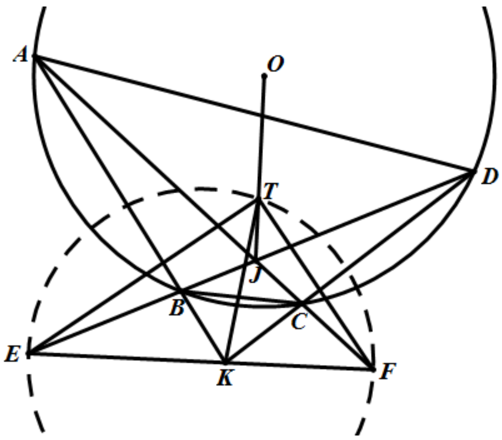
王琛

(浙江省乐清市乐成寄宿中学, 325600)

指导教师: 羊明亮

2017 年秋季上海新星数学奥林匹克中有这样一道题:

题 1. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 且 $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. 四边形的对边 AB, CD 交于点 K, 对角线 AC, BD 交于点 J (O, J 不重合). 过点 K 作 OJ 的垂线, 分别与直线 BD, AC 交于点 E, F. 以 EF 为直径的圆与线段 OJ 交于点 T. 证明: KT 平分 $\angle ETF$.



该题难度适中, 图形蕴含丰富的几何性质, 是道较好的几何题.

下文将给出三道与本题在图形上有很大关联的几何题, 并由题 3 与题 4 分别给出题 1 的两个证明.

为方便理解, 题 2, 3, 4 及其证明中各点使用的符号均与题 1 保持一致.

题 2. 在 $\triangle TEF$ 中, 已知 $\angle ETF = 90°$, H 为过顶点 T 的高的垂足, 设 J 为线段 TH 内部的一点, B 为线段 EJ 上一点, 使得 $FB = FT$. C 为线段 FJ 上的一点, 使得 $EC = ET$. P 为 EC 与 BF 的交点, 证明: $PB = PC$.[1].

(第 53 届 IMO 试题)

收稿日期: 2017-12-14; 修订日期: 2018-01-29.

证明 设 $\triangle JEF$ 的垂心为 O, FJ,EJ 分别交 OE,OF 于点 M,N. 则由 $FJ\perp OE,OH\perp EF$ 知 O,M,H,F 四点共圆.

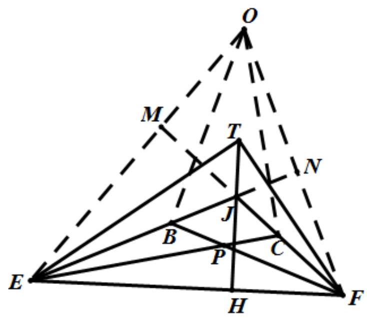
由射影定理, $EC^2=ET^2=EH\cdot EF=EM\cdot EO$.

则由射影定理的逆定理知 $\angle ECO=90^\circ$.

同理, $\angle FBO=90^\circ$.

又注意到, E,M,N,F 四点共圆, 又由射影定理, $OC^2=OM\cdot OE=ON\cdot OF=OB^2$.

故 $OB=OC$. 从而 $\mathrm{R_t}\triangle OBP\cong\mathrm{R_t}\triangle OCP$, 因此 $PB=PC$. □



探索题 2 的图形可得题 3.

题 3. 已知不等边 $\triangle TEF$ 满足 $\angle ETF=90^\circ, TH\perp EF, H$ 为垂足, J 为线段 TH 上的一点, B 为线段 EJ 上的一点, 使得 $FB=FT$. C 为线段 FJ 上的一点, 使得 $EC=ET$. $\triangle HBC$ 的外接圆与线段 EF 的第二个交点为 K(异于点 H). 证明: KT 平分 $\angle ETF$.[2]

(2013 美国国家队选拔考试)

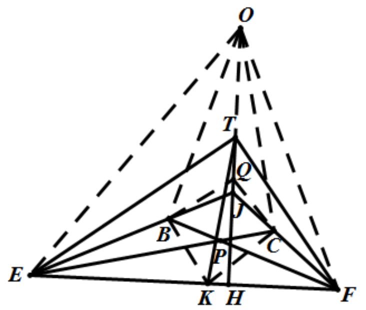
证明 设 $\triangle JEF$ 的垂心为 O, $\triangle HBC$ 的外接圆与 TH 的第二个交点为 Q (异于点 H).

同题 2 证明, 有 $OB=OC,\angle OBF=\angle OCE=90^\circ$.

又 $OH\perp EF$, 故 O,B,H,F 四点共圆. 于是 $\angle BOQ=\angle BFK$; $\angle BQO=180^\circ-\angle BQH=180^\circ-\angle BKE=\angle BKF$.

因此 $\triangle BQO\sim\triangle BKF$.

同理 $\triangle CQO\sim\triangle CKE$.



从而

$$\frac{FK}{FT}=\frac{FK}{FB}=\frac{OQ}{OB}=\frac{OQ}{OC}=\frac{EK}{EC}=\frac{EK}{ET}.$$

即

$$\frac{FK}{EK}=\frac{FT}{ET}.$$

由角平分线定理的逆定理知, KT 平分 $\angle ETF$. □

事实上我们可以发现, 题 1 的条件与题 3 的条件是等价的, 两题的图形与要证明的结论也一模一样, 也就是说, 题 1 和题 3 实际上是同一道题!

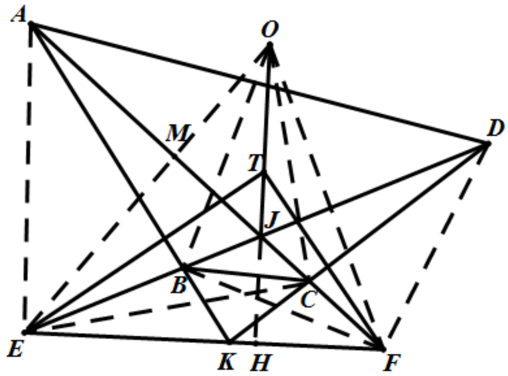
于是将题 1 转化为题 3, 我们得到题 1 的第一个证明.

题 1 证法一 由于四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, 点 J,K 分别为其对角线和对边的交点, 故点 J 关于 $\odot O$ 的极线过点 K.

又 $OJ\perp EF$, 故直线 EF 即为点 J 关于 $\odot O$ 的极线.

设直线 AD,BC 交于点 L, 则由密克点的性质知, OJ 与点 J 关于 $\odot O$ 的极线 EF 的交点 H 为完全四边形 $ABCDKL$ 的密克点.

故 B,C,H,K 四点共圆. (1)



又因为直线 AC 过点 J, 由配极定理, $\odot O$ 在点 A 处的切线, 在点 C 处的切线及直线 EF 三线共点.

又由 $AB\cdot CD=BC\cdot AD$ 知四边形 $ABCD$ 为调和四边形. 故 $\odot O$ 在点 A 处的切线, 在点 C 处的切线以及直线 BD 三线共点.

从而上述三条直线与直线 EF 四线共点, 且交点为 E. 于是有

$$\angle OCE=90^\circ;\ OE\perp AC.$$

设直线 OE,FA 交于点 M, 则 O,M,H,F 四点共圆.

于是由射影定理, $EC^2=EM\cdot EO=EH\cdot EF=ET^2$. 故 $EC=ET$.

同理, $FB=FT$. (2)

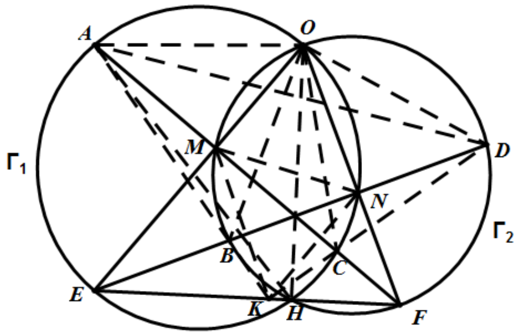
综合 (1),(2), 我们将条件转化为了题 3 的条件.

结合题 3 的证明知题 1 的结论成立. □

依据题 3 中 K 点的不关于 $\angle ETF$ 的性质, 可将题 3 改编为题 4.

题 4. *在锐角 $\triangle OEF$ 中, 以 OE 为直径的圆 Γ_1 分别与边 EF,OF 交于点 H,N. 以 OF 为直径的圆 Γ_2 分别与边 EF,OE 交于点 H,M. EN 的延长线交圆 Γ_2 于点 D, FM 的延长线交圆 Γ_1 于点 A, $\triangle AHD$ 的外接圆交 EF 于点 H,K. 证明: $\triangle MNK$ 的外接圆与直线 EF 相切.*

证明 设线段 EN,FM 分别与圆 Γ_2, 圆 Γ_1 交于点 B,C,



显然, OH, EN, FM 为 $\triangle OEF$ 的三条高. 于是有

$$OM \cdot OE = ON \cdot OF.$$

又 OE, OF 分别为圆 Γ_1, 圆Γ_2 的直径, 则由射影定理,

$$OB^2 = ON \cdot OF = OD^2;\ OA^2 = OM \cdot OE = OC^2.$$

从而

$$OA = OB = OC = OD.$$

即 A, B, C, D 四点共圆于以 O 为圆心的圆上. 因此

$$\begin{aligned}
\angle ODK &= \angle ODA + \angle ADK \\
&= (90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOD) + \angle AHE \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle AOC \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DOC \\
&= \angle ODC.
\end{aligned}$$

故 K, C, D 三点共线.

同理, K, A, B 三点共线.

则由 A, B, C, D 四点共圆知 $\triangle KAC \sim \triangle KBD$.

又由 $OE \perp AC$, $OF \perp BD$ 得点 M, N 分别为线段 AC, BD 的中点. 故

$$\triangle KMC \sim \triangle KNB.$$

所以 $\angle KMC = \angle KNB$, 故

$$\angle KME = 90^\circ - \angle KMC = 90^\circ - \angle KNB = \angle KNF.$$

因此

$$\begin{aligned}
\angle KMN &= 180^\circ - \angle OMN - \angle EMK \\
&= 180^\circ - \angle OFE - \angle FNK
\end{aligned}$$

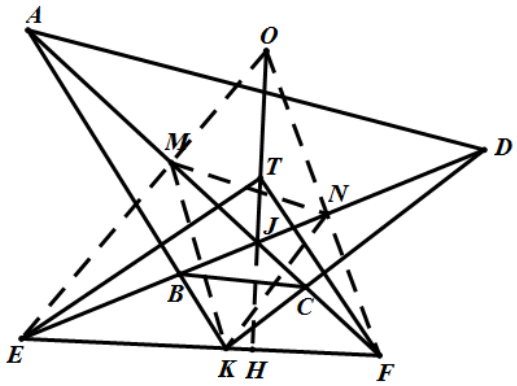
$$= \angle NKF.$$

故 $\triangle KMN$ 的外接圆与直线 EF 相切. □

题 4 的条件与题 1 的条件也是等价的.

模仿题 4 的证明, 得到题 1 的另一个证明.

题 1 证法二 设 OJ, OE, OF 分别交 EF, AC, BD 于点 H, M, N.



同证明 1 知, $OE \perp AC, OF \perp BD$, 且 M, N 分别为线段 AC, BD 的中点.

由于 A, B, C, D 四点共圆, 故 $\triangle KAC \sim \triangle KBD$. 因此 $\triangle KMC \sim \triangle KNB$. 即 $\angle KMC = \angle KNB$. 从而 $\angle KME = \angle KNF$, 于是 $\angle KMN = \angle NKF$. 即 $\triangle KMN$ 的外接圆与 EF 相切.

则由正弦定理及射影定理,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{EK}{FK}\right)^2 &= \frac{\sin\angle EMK \cdot \frac{MK}{\sin\angle MEK}}{\sin\angle FNK \cdot \frac{NK}{\sin\angle NFK}} \cdot \frac{\sin\angle EMK \cdot \frac{EM}{\sin\angle MKE}}{\sin\angle FNK \cdot \frac{FN}{\sin\angle NKF}} \\
&= \frac{\sin\angle NFK}{\sin\angle MEK} \cdot \left(\frac{MK}{NK} \cdot \frac{\sin\angle NKF}{\sin\angle MKE}\right) \cdot \frac{EM}{FN} \\
&= \frac{OE}{OF} \cdot 1 \cdot \frac{\cos\angle MEF}{\cos\angle NFE} \\
&= \frac{EH}{FH} = \left(\frac{ET}{FT}\right)^2
\end{aligned}$$

故

$$\frac{EK}{FK} = \frac{ET}{FT}.$$

由角平分线定理的逆定理知 KT 平分 $\angle ETF$. □

需要指出的是, 证明 1 以及证明 2 (尤其是证明 1) 并不是自然的, 但它们对图形挖掘得比较透彻, 并且联系了多个题目, 对掌握题 1 的图形是有很大帮助的.

题 1 还有一些不依赖于题 3 及题 4 的证明, 这里不再一一给出.

参考文献

[1] 熊斌 提供. 第 53 届 IMO 试题解答 [J]. 中等数学, 2012.09.

[2] 冯祖鸣 提供, 李建泉 翻译. 2013 美国国家队选拔考试 [J]. 中等数学, 2014.08.