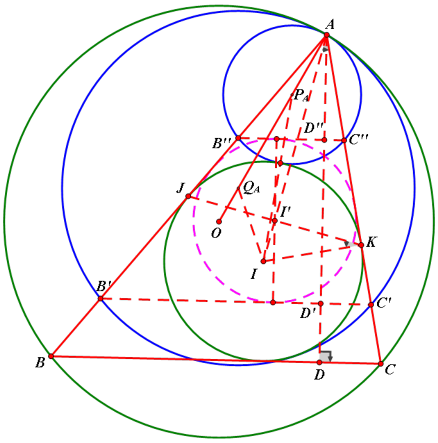
2007 年美国数学奥林匹克第六题的简证

金磊

(西安交通大学附属中学, 710048)

2007 年美国数学奥林匹克第六题为:

题目. 已知 $\triangle ABC$ 内切圆、外接圆为圆 I、圆 O, 设圆 O 半径为 R. 过点 A 作圆 P_A、Q_A 均与圆 O 内切于 A 点, 且圆 P_A 与圆 I 外切, 圆 Q_A 与圆 I 内切. 类似定义 P_B, Q_B、P_C, Q_C. 求证: $8P_AQ_A \cdot P_BQ_B \cdot P_CQ_C \le R^3$, 等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形 [1].



本题是一个以非常困难而著称的题目. 官方提供的证明 [1] 要利用反演变换, 而且计算非常复杂, 其他书籍 [2] , [3] , [4] 也给出了各种其他的证明, 但是都比较繁琐. 下面给出两种新的简洁的证明, 第一种是纯几何方法, 利用曼海姆定理和位似得到. 第二种是自然而简洁的三角计算方法. 当然最后都用到了简单的均值不等式和琴生不等式.

证法一 设圆 I、Q_A 半径为 r、x, $\triangle ABC$ 边角依次为 a, b, c, A, B, C; 面积为 S.

由对称性不妨设 $C > B$, $R = 1$. 设圆 Q_A、P_A 分别交 AB、AC 于 B', C' 及 B'', C''.

收稿日期: 2018-03-17; 修订日期: 2018-03-31.

圆 I 与 AB、AC 切于 J、K, JK 交 AI 于 I', $AD\perp BC$ 于 D. 则由曼海姆定理知 I' 为 $\triangle AB'C'$ 内心、$\triangle AB''C''$ 的 $A-$旁心, 设此圆半径为 r'.

显然 $\triangle AB'C'$ 及 $\triangle AB''C''$ 均与 $\triangle ABC$ 位似. 从而得到

$$\begin{aligned}x=\frac{x}{R}&=\frac{AI'}{AI}=\cos^2\frac{A}{2},\\ \frac{P_AQ_A}{x}&=\frac{P_AQ_A}{AQ_A}=1-\frac{AP_A}{AQ_A}=1-\frac{AD''}{AD'}=\frac{2r'}{AD'}\\ &=\frac{2r}{AD}=\frac{4S}{a+b+c}\frac{a}{2S}=\frac{2a}{a+b+c}.\end{aligned}$$

则

$$P_AQ_A=\frac{2ax}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}\cos^2\frac{A}{2}.$$

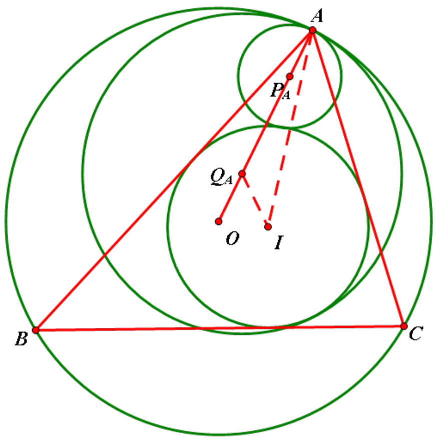
同理可以得到 P_BQ_B,P_CQ_C. 故

$$\begin{aligned}8P_AQ_A\cdot P_BQ_B\cdot P_CQ_C&=8\frac{8abc}{(a+b+c)^3}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2\\ &\leq\frac{64abc}{27abc}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^6\\ &\leq\frac{64}{27}\left(\cos\frac{A+B+C}{6}\right)^6=1=R^3.\end{aligned}$$

即 $8P_AQ_A\cdot P_BQ_B\cdot P_CQ_C\leq R^3$, 当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号. □

注 曼海姆 (Manheim) 定理一般叙述为: 如上图, 若圆 I 与 $\triangle AB'C'$ 外接圆相内切, 且与 AB、AC 切于 J、K, JK 交 AI 于 I', 则 I' 为 $\triangle AB'C'$ 内心; 对旁心也有类似结论, 即圆 I 与 $\triangle AB''C''$ 外接圆相外切, 且与 AB、AC 切于 J、K, JK 交 AI 于 I', 则 I' 为 $\triangle AB''C''$ 的 A 旁心. 且反之亦然.

曼海姆定理另一种等价叙述为: 定点 A 在定圆 O 外, B、C 分别在圆 O 切线 AJ、AK 上, 且 BC 与圆 O 切于 D, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆与某定圆相切, 即点 D 运动时, $\triangle ABC$ 的外接圆的包络为圆, 显然此时外心轨迹为双曲线.



证法二 设圆 I、Q_A、P_A 半径为 r、x、y, $\triangle ABC$ 边角依次为 $a,b,c,$ A,B,C; 面积为 S, 由对称性不妨设 $C>B$, $R=1$, 则

$$\begin{aligned}r&=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{bc\sin A}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}\\&=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=\frac{\sin A\sin B\sin C}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\\&=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

显然 P_A、Q_A 在 OA 上, 则

$$\begin{aligned}\angle OAI&=\angle OAC-\angle CAI=90^\circ-\angle B-\frac{1}{2}\angle A\\&=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B);\\AI&=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}.\end{aligned}$$

由圆 Q_A 与圆 O、I 内切及在 $\triangle AIQ_A$ 中, 由余弦定理得:

$$\begin{aligned}x^2+\frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}-2x\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{C-B}{2}&=(x-r)^2=x^2-2xr+r^2,\\2x\frac{\cos\frac{C-B}{2}-\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}&=r\cot^2\frac{A}{2},\\x=r\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}&=\cos^2\frac{A}{2}.\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}y^2+\frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}-2y\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{C-B}{2}&=(y+r)^2=y^2+2yr+r^2,\\y=r\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}&=\cos^2\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

从而

$$P_AQ_A=\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

同理

$$P_BQ_B=\frac{\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}},\quad P_CQ_C=\frac{\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

从而

$$\begin{aligned}&8P_AQ_A\cdot P_BQ_B\cdot P_CQ_C\\=&8\frac{\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le 8\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \\
&\le 8\sin^3\frac{A+B+C}{6} = 1 = R^3.
\end{aligned}
$$

即 $8P_AQ_A \cdot P_BQ_B \cdot P_CQ_C \le R^3$, 当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号. $\square$

注 证法二中得到的恒等式 $P_AQ_A \cdot P_BQ_B \cdot P_CQ_C = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 还是很漂亮的.

参考文献

[1] 2007年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦. 2007 [M]. 华东师大出版社, 2007.

[2] 田廷彦. 数学奥林匹克命题人讲座, 圆 [M]. 上海科技教育出版社, 2010.

[3] 单墫. 数学竞赛研究教程 [M]. 江苏教育出版社, 2009.

[4] 沈文选, 杨清桃. 高中数学竞赛解题策略. 几何分册 [M]. 浙江大学出版社, 2012.