2018 年上海数学新星春季精品班测试题

试 题 I

2018 年 4 月 18 日 18:00－20:30

1. 点 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心. M 是直线 AO 与 BC 的交点. D 是 AO 与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点. 点 E 在 AD 上使得 M 是线段 ED 的中点. 过 M 作垂直于 AD 的直线交 AC 于 F. 证明: $EF \perp AB$.

2. 设 N 是一个合数, $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是不大于 N 且和 N 不互素的所有正整数组成的集合, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列. 证明: 存在正整数 $i \neq j$, 使得 $N \mid a_ib_i - a_jb_j$.

3. 设 $n \geq 2$ 是给定的正整数. 求最大的 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k|^2 \geq \lambda \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^2$$

(其中 $x_{n+1} = x_1$) 对任何满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立.

4. 互异实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和互异实数 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都属于 $[0,1)$. 将它们两两和的小数部分 $\{a_i + b_j\}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ 逐一写在黑板上. 已知黑板上至多有 $m+n-2$ 个不同的数. 证明: 黑板上的每个数都在黑板上至少出现了 2 次.

试 题 II

2018 年 4 月 20 日 18:00—20:30

1. 点 O 是非等边 $\triangle ABC$ 的外心. 直线 OA 分别与过点 B, C 的高线相交于点 P, Q. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心. 证明: $\triangle PQH$ 的外接圆圆心在 $\triangle ABC$ 的一条中线上.

2. 证明: 我们可将每个正整数三染色使得下面条件成立:

(1) 对每个非负整数 n, 所有满足 $2^n \leq x < 2^{n+1}$ 的 x 均同色;

(2) 除了 $x = y = z = 2$ 外, 不存在同色的正整数 x, y, z, 使得 $x + y = z^2$.

3. 称由三个正整数构成的三元组 (a, b, c) 是“好的”, 若 $a < b < c$ 且

$$a \mid bc + b + c, \quad b \mid ac + a + c, \quad c \mid ab + a + b.$$

(1) 证明存在无穷多个好的三元组.

(2) 若 $(a, b) = 1$. 求出所有好的三元组.

4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数, 令 $\varphi(p) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 证明: 对任意 $p, q > 0$, 有

$$\varphi\left(\frac{p+q}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\varphi\left(p\right) + \varphi\left(q\right)\right).$$