第二十五期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 给定实数 $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$, 满足 $x_i^2+y_i^2=1,\forall i$. 求下列表达式

$$\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j(x_iy_j-x_jy_i)^2$$

在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时的最大值.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

解 (根据南京外国语学校姜明哲同学的解答整理):

令 $(x_i,y_i)=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$, 则

$$(x_iy_j-x_jy_i)^2=\sin^2(\theta_i-\theta_j)=\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta_i-2\theta_j)).$$

于是所求表达式可以化简为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j(x_iy_j-x_jy_i)^2&=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j(1-\cos(2\theta_i-2\theta_j))\\&=\frac{1}{4}\left(1-(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\cos 2\theta_i)^2-(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sin 2\theta_i)^2\right).\end{aligned}$$

考虑单位圆上的点 $Q_i=(\cos 2\theta_i,\sin 2\theta_i)$, 以及它们凸包中的点 $Q=\sum_{i=1}^{N}\lambda_iQ_i$. 则上面的式子又可写为

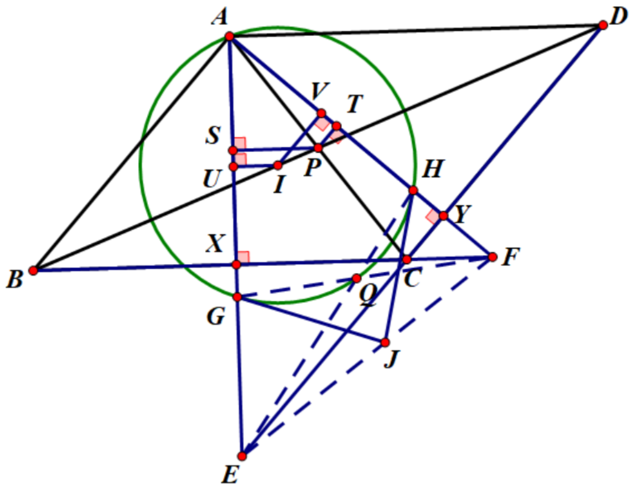
$$\frac{1}{4}(1-|OQ|^2).$$

所以当 $Q_1\sim Q_n$ 的凸包覆盖原点时, 最大值是 $\frac{1}{4}$; 而当原点在凸包之外时, 易知 $Q_1\sim Q_n$ 分布在一个半圆内. 令 Q_iQ_j 为距离原点最近的那条边, 则 $\frac{1}{4}(1-|OQ|^2)$ 的最大值在 Q 为 Q_iQ_j 中点时取到. □

评注 杭州二中包恺成, 上海中学蒋天泽, 华中师范大学第一附属中学姚睿等同学也给出了本题的正确解答.

第二题. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 在直线 DC 上, 且 $AE\perp BC$; F 在直线 BC 上, 且 $AF\perp DC$. 以 BD 上任意点 I 为圆心, IA 为半径作圆, 与 AE,AF 分别交于 G,H. 过 G,H 的圆 I 的切线交于 J. 证明: J 在直线 EF 上.

(西安交大附中 金磊 供题)



解 (根据杭州二中刘浩宇同学的解答整理):

设 AE 交 BC 于 X, AF 交 DE 于 Y, AC 交 BD 于 P. U,V 分别为 I 在 AE,AF 上的投影, 而 S,T 分别为 P 在 AE,AF 上的投影. GF 交 EH 于 Q.

由条件, $AG=2AU, AX=2AS$. 故 $XG=2SU$, 同理 $YH=2VT$. 易见 $\triangle BAF\sim\triangle DAE$, 而 X,Y 为对应边上的垂足, 故 $\frac{XF}{YE}=\frac{AB}{AD}$.

另一方面,

$$\frac{XG}{YH}=\frac{SU}{VT}=\frac{IP\cdot\sin\angle SPI}{IP\cdot\sin\angle VIP}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{AD}.$$

所以 $\frac{XF}{YE}=\frac{XG}{YH}$, 即 $\frac{XF}{XG}=\frac{YE}{YH}$.

故 $\triangle XGF\sim\triangle YHE$, 因此得到 $\angle XFG=\angle QEY$. 从而 E,Q,C,F 共圆, $\angle GQH=\angle EQF=\angle ECF=\angle BCD=\pi-\angle GAH$. 所以 Q 在圆 I 上.

对六边形 $AGGQHH$ 用 Pascal 定理, 即知 E,J,F 共线. □

评注 哈尔滨第三中学刘枭男, 杭州二中包恺成, 雅礼中学段钦瀚, 浙江镇海中学严君啸, 苏州中学吴雨桐, 芜湖一中王龙杰, 镇海蛟川书院刘哲源, 长郡中学常杰以及武钢三中尚鉴桥等同学也给出了本题的正确解答.

第三题. 设 S 是正实数集, 满足以下两个条件:

(1) $1\in S$, 且 S 在加法与乘法下封闭;

(2) 存在 S 的子集 P, 使得 S 中任意不等于 1 的数都能唯一表示成 P 中若干数 (允许相同) 的乘积.

问: S 是否一定是正整数集?

(普林斯顿大学 郑凡 供题)

解 (根据武钢三中尚鉴桥同学的解答整理):

设 F 为所有首项系数为正的整系数多项式的集合, 而 G 为 F 中由不可约多项式构成的子集 (即 $1 \notin G$, 且 G 中任意多项式不能表示为 F 中两个非 1 的多项式之乘积). 考虑任意一个超越数 α (例如 $\alpha = \pi$), 令

$$S = \{|f(\alpha)| : f \in F\}; \quad P = \{|g(\alpha)| : g \in G\}.$$

则 S 与 P 同时满足所要求的两个条件 (其中分解的唯一性由 $\mathbb{Z}[x]$ 的唯一分解性质与 α 的超越性保证). 因此 S 不一定是正整数集. □

评注 杭州二中刘浩宇同学也给出了本题的正确解答.

第四题. 设 $S_1, \ldots, S_p, T_1, \ldots, T_p$ 是 $\{1, \ldots, N\}$ 的互异子集, 满足任意 S_i 与任意 T_j 的交集非空. 证明: $p < (3 - \sqrt{5}) \cdot 2^{N-1}$.

(IMO 2007 预选题 反向结论)

证明 (根据供题者的解答整理):

令 $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_p\}$, $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_p\}$. 考虑任意 $\{1, \ldots, N\}$ 的子集 X, 如果 X 包含某个 S_i, 且 X 不在这两个子集族中, 则我们可以将 X 添加至 $\mathcal{S}$ 中, 使得 $\mathcal{S}$ 中每个子集仍与 $\mathcal{T}$ 中每个子集相交. 类似地, 如果 Y 包含某个 T_j 且 Y 不在两个子集族中, 我们可以将 Y 添加至 $\mathcal{T}$ 中. 反复如此操作, 我们最终得到两个更大的子集族

$$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_q\}; \quad \mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_r\}.$$

它们满足 $q, r \geq p$, 且 $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ 是一个"上闭子集族". [1]

通过调整下标, 不妨设 $S_{q-m+1}, \ldots, S_q$ 为 $\mathcal{S}$ 中包含某个 T_j 的那些集合. 类似地定义 $T_{r-n+1}, \ldots, T_r$. 令

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \cup \{T_{r-n+1}, \ldots, T_r\};$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{S_{q-m+1}, \ldots, S_q\}.$$

易知这两个子集族也都是"上闭子集族", 并且 $\mathcal{S}^*$ 中任意子集也与 $\mathcal{T}^*$ 中每个子集相交. 于是显然有 $|\mathcal{S}^*| + |\mathcal{T}^*| \leq 2^N$, 也就是

$$q + n + r + m \leq 2^N.$$

如果结论不成立, 则 $q, r \geq p > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 2^N$. 于是上面的不等式导出 $m + n < (\sqrt{5} - 2) \cdot 2^N$.

[1] 上闭子集族的意思是每当 $A \in \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, 则任意包含 A 的集合 B 也在 $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ 中.

另一方面, 与 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 不同, 我们后来得到的 $\mathcal{S}^*$ 与 $\mathcal{T}^*$ 是有重复元素的. 事实上,

$$\mathcal{S}^* \cap \mathcal{T}^* = \{S_{q-m+1}, \ldots, T_m\} \cup \{T_{r-n+1}, \ldots, T_r\}.$$

应用上闭子集族的关联不等式 (详见评注), 我们有

$$|\mathcal{S}^* \cap \mathcal{T}^*| \geq \frac{1}{2^N} \cdot |\mathcal{S}^*| \cdot |\mathcal{T}^*|,$$

也就是

$$m+n \geq \frac{(q+n)(r+m)}{2^N}.$$

利用 $q, r \geq p$, 我们得到

$$m+n \geq \frac{(p+n)(p+m)}{2^N} \geq \frac{p(p+m+n)}{2^N}.$$

依旧假设 $p > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 2^N$, 则我们有 $m+n > \frac{3-\sqrt{5}}{2}(p+m+n)$. 所以

$$m+n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}p > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 2^N = (\sqrt{5}-2) \cdot 2^N.$$

这样就与之前得到的结论矛盾了, 于是命题得证! □

评注 (1). 上面用到的关联不等式可以通过对 N 归纳证明, 在单墫老师讲集合的那本小丛书里有详细介绍, 这里略去细节. 其更一般的形式被称之为 FKG 不等式, 是组合中概率方法的一个常用工具.

(2). 2007 年 IMO 预选题的组合部分第 7 题证明了 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 是不可改进的. 具体构造如下: 考虑 $N = K \cdot M$, 然后将 $\{1, \ldots, N\}$ 拆分为 K 个 M 元子集 $A_1, \ldots, A_K$. 令 $\mathcal{S}$ 为与 $A_1, \ldots, A_K$ 均相交的集合构成的子集族, 而 $\mathcal{T}$ 为包含某个 $A_1, \ldots, A_K$ 的集合 (除去已经在 $\mathcal{S}$ 中的那些) 构成的子集族. 则对于每个 $c < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 都存在适当的 K 以及 M 使得 $|\mathcal{S}|, |\mathcal{T}| > c \cdot 2^N$.

IMO官方解答中提到本题的结果, 但没有提供证明. 我在去年才想到证明, 当时的出发点是注意到上面构造的“不对称性”, 即在 $\mathcal{T}$ 的定义里排除了先定义的 $\mathcal{S}$ 中的集合. 为了恢复对称性, 在证明中我们添加重复元素得到 $\mathcal{S}^*$ 与 $\mathcal{T}^*$. 显然 $\mathcal{S}^*$ 与 $\mathcal{T}^*$ 总共至多有 2^N 个集合, 因此为了使得原来的 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{T}$ 有最多的集合, 我们希望被添加的集合最少. 这样问题的核心就变成了估计 $\mathcal{S}^*$ 与 $\mathcal{T}^*$ 的交集, 而关联不等式恰好能派上用处. 值得一提的是, 上面构造的不对称性是必要的, 这对应证明中 $(p+n)(p+m) \geq p(p+m+n)$ 的放缩, 因为等号成立必须有 m 或 n 为零.