数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

一道 IMO 预选题加强结果的通法与妙解

段钦瀚

(湖南省雅礼中学, 长沙, 410007)

首先介绍一道第 34 届 IMO 预选题中的一道题:

问题 1. 如果一个 (互异) 正整数的有限集合的所有元素之和是集合中所有数的公倍数, 则称这个集合为“和倍集”. 求证: 正整数的每个有限集合都是某个和倍集的子集.

分析 我们首先对这个题有个初步判断: 设集合 M 的元素和为 $S(M)$, 所有元素的最小公倍数为 $T(M)$. 那么希望对于集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 存在集合 Y 使得 $X\subseteq Y$ 且 $T(Y)\mid S(Y)$. 虽然已经得到的已知量 $S(X)$, $T(X)$ 并无直接关系, 但我们知道 $S(X),T(X)\geq \max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 为了保证加入的元素与 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中的元素不重复, 故希望通过加入一些比 $S(X)$, 或 $T(X)$ 大的且与 $S(X),T(X)$ 有关的互不相同的数放入 Y 使得 $T(Y)\mid S(Y)$. 故只需看作对于给定的正整数 s,t, 取数 $a_1,a_2.\cdots,a_n$ 使得

$$[t,a_1,a_2,\cdots,a_n]\mid s+\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

一个好的想法是考虑 2 的幂, 这是因为 2 的幂求和直接得到的是较高次数的 2 的幂.

证明 设给定的有限集为 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 令

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i,\ m=[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

设 $m=2^kn$, 其中 n 和 k 都是非负整数且 n 为奇数, 设 n 的二进制展开式为

$$n=\varepsilon_0+2\varepsilon_1+\cdots+2^t\varepsilon_t,$$

其中 $\varepsilon_i\in\{0,1\},i=0,1,\cdots,t$, 且 $\varepsilon_0=\varepsilon_t=1$.

将集合 $A=\{2^is\mid 1\leq i\leq t,\varepsilon_i=1\}$ 并入给定的集合 S, 于是扩充后的集合

收稿日期: 2018-03-04;　修订日期: 2018-04-25.

所有数和为 ns. 最后, 再将集合 $\{2^j ns \mid j=0,1,\cdots,l-1\}, l=\max\{k,t\}$ 并入上述集合, 则所得集合 T 中所有数之和为 $2^l ns$. 这个数被 m 整除, 从而被每个 a_i 整除, 同时又可被上述的诸 $2^i s, 2^j ns$ 整除, 故 T 为和倍集. □

上述方法的确可以使元素和为所有元素的公倍数, 笔者在此基础上将其加强, 希望元素和恰为所有元素的最小公倍数.

问题 2. 如果一个 (互异) 正整数的有限集合的所有元素之和是集合中所有数的最小公倍数, 则称这个集合为"好集". 求证: 正整数的每个有限集合都是某个好集的子集.

分析 不难发现考虑 2 的幂的和得到较高次数的 2 的幂可以解决整除问题, 但对于最小公倍数这一限制难以达到, 故 2 的幂可能难以保证, 我们希望通过其他手段去满足 .

我们假设这个给出的集合为 $T=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 设

$$A=[d_1,d_2,\cdots,d_n],\ \ B=\sum_{i=1}^n d_i.$$

现在要扩充集合 T 使得扩充后的集合所得到的 $A=B$, 因此首先我们不妨将 A,B 的公因数提出来, 即希望 $(A,B)=1$. 现在要想得到 $A=B$, 我们不妨分两步走, 第一步先保证 $A\mid B$ 或 $B\mid A$, 再进一步得到相等.

想要 $A\mid B$ 并不容易 (此即为问题 1), 但要保证 $B\mid A$ 很容易, 例如令新的集合为 $T\cup\{2B,3B\}$, 这个集合的元素和即为 $6B$, 且这个集合的公倍数为 $6B$ 的倍数. 因此我们希望先满足 $B\mid A$.

我们假设完成第一步后新的集合为

$$T=\{d_1,d_2,\cdots,d_n,x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$

设

$$A_1=[d_1,d_2,\cdots,d_n,x_1,x_2,\cdots,x_m],\ \ B_1=\sum_{i=1}^n d_i+\sum_{i=1}^m x_i,$$

且满足

$$A_1=[d_1,d_2,\cdots,d_n,x_1,x_2,\cdots,x_m]=k\left(\sum_{i=1}^n d_i+\sum_{i=1}^m x_i\right)=kB_1, k\in\mathbb{N}^*.$$

再进一步对 T_1 扩充, 这时自然地希望扩充的元素均为 B_1 的倍数, 从而可以提出公因数 B_1, 而提出 B_1 后则我们可以将这一步操作看作如下命题:

命题 1. 对于任意正整数 k, 存在正整数 l 与 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 满足如下条件:

(1) $a_1,a_2,\cdots,a_l,k$ 互不相等;

(2) $[a_1, a_2, \cdots, a_l, k] = 1 + \sum\limits_{i=1}^{l} a_i$.

事实上, 上述的 l 取为 $k+1$ 时是成立的, 可以利用加强命题的数学归纳法证明, 是一道不错的训练题. 这是这个证明的关键性引理, 但并非异想天开, 是通过推理自然得到的. 由此, 整体思路大致出来, 但还要注意保证集合的元素互异性.

下面给出笔者关于问题 2 的证明:

证法一 首先证明一个引理:

引理 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 存在正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} > 1$, 满足 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, k$ 互不相等且

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, k] = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i.$$

引理证明 对 k 归纳证明.

当 $k = 1$ 时, 取 $a_1 = 2, a_2 = 3$ 满足题意.

当 $k = 2$ 时, 取 $a_1 = 3, a_2 = 8, a_3 = 12$ 满足题意.

假设命题对 $k\ (k \geq 2)$ 成立, 考虑 $k+1$ 的情形:

由归纳假设, 存在 $b_i\ (i = 1, 2, \cdots, k+1)$ 使得 $b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}, k$ 互不相等且满足

$$[b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}, k] = \sum_{i=1}^{k+1} b_i + 1.$$

令 $a_i = (k+1)b_i, i = 1, 2, \cdots, k+1, a_{k+2} = k$, 则显然有

$$a_i \geq k \geq 2 > 1\ (1 \leq i \leq k+2).$$

因为 $b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}$ 互不相等且均大于 1, 所以 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+2}, k+1$ 互不相等. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+2} a_i + 1 = \sum_{i=1}^{k+1}(k+1)b_i + k + 1 &= (k+1)(\sum_{i=1}^{k+1} b_i + 1) \\ &= (k+1)[b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}, k] = [a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, k(k+1)] \\ &= [a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, k, k+1] = [a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}, a_{k+2}, k+1].\end{aligned}$$

因此命题对 $k+1$ 成立, 由归纳原理, 引理获证.

回到原题. 对于给定的正整数集合 $T = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$. 设

$$A = [d_1, d_2, \cdots, d_n],\ \ B = \sum_{i=1}^{n} d_i,\ \ D = (A, B),\ \ m = \frac{A}{D},\ \ l = \frac{B}{D},$$

则 $(m, l) = 1$.

当 $n=1$ 时 T 显然为好集, 考虑 $n\geq 2$ 的情况, 则 $B>d_i\ (1\leq i\leq n)$.

情形 1: 当 $m\geq 2$ 时, 由引理, 取 $k=m-1$, 则 $k\in\mathbb{N}^*$, 故存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ 满足 $a_1,a_2,\cdots,a_m,m-1$ 互不相等且

$$[a_1,a_2,\cdots,a_m,m-1]=\sum_{i=1}^{m}a_i+1.$$

令 $R=\{d_1,d_2,\cdots,d_n,(m-1)B,mBa_1,mBa_2,\cdots,mBa_m\}$, 则 $T\subset R$ 且 R 为好集. 事实上, 由于 $B>d_i\ (1\leq i\leq n)$, $m\geq 2$, 故

$$mBa_j>(m-1)B>d_i\ (1\leq i\leq n,1\leq j\leq m).$$

又正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 互不相同, 故 R 中元素互不相等.

设 R 的所有元素的最小公倍数为 A_R, 所有元素和为 B_R. 由于 $m=\frac{A}{D},l=\frac{B}{D},(m,m-1)=(m,l)=1$, 则有

$$\begin{aligned}A_R&=[d_1,d_2,\cdots,d_n,(m-1)B,mBa_1,mBa_2,\cdots,mBa_m]\\&=[[d_1,d_2,\cdots,d_n],(m-1)B,mBa_1,mBa_2,\cdots,mBa_m]\\&=[A,(m-1)B,mBa_1,mBa_2,\cdots,mBa_m]\\&=D[m,(m-1)l,mla_1,mla_2,\cdots,mla_m]\\&=D[m(m-1)l,mla_1,mla_2,\cdots,mla_m]\\&=Dml[m-1,a_1,a_2,\cdots,a_m]=Dml\left(1+\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\\&=B+\left(\frac{A}{D}-1\right)B+mB\sum_{i=1}^{m}a_i=B_R.\end{aligned}$$

情形 2: 当 $m=1$ 时, 则 $A=D$, $A\mid B$. 设

$$w=\frac{A(A+1)}{2},\ \ B=tA,\ \ t\in\mathbb{N}^*.$$

当 $t=1$ 时 T 即为好集. 考虑 $t\geq 2$ 的情况.

由引理, 取 $k=w$, 则存在 $b_1,b_2,\cdots,b_{m+1}\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ 满足 $b_1,b_2,\cdots,b_{w+1},w$ 互不相等且满足 $[b_1,b_2,\cdots,b_{w+1},w]=1+\sum\limits_{j=1}^{w+1}b_j$. 令

$$S=\{d_i,t(A+1),t(2A+1),2t(2A+1)b_j\ (1\leq i\leq n,1\leq j\leq w+1)\},$$

则 $T\subset S$ 且 S 为好集.

事实上, 由于正整数 $b_1,b_2,\cdots,b_{w+1}$ 均大于 1 且互不相等, 又

$$2t(2A+1)b_j>2t(2A+1)>t(2A+1)>t(A+1)>A\geq d_i,$$

这里 $1\leq i\leq n,1\leq j\leq w+1$, 故 S 中的元素两两不同.

设 S 的所有元素的最小公倍数为 A_S, 所有元素和为 B_S.

由于 $A, A+1, 2A+1$ 两两互质, $w=\frac{A(A+1)}{2}, B=tA$, 因此

$$
\begin{aligned}
A_s &= [A, t(A+1), t(2A+1), 2t(2A+1)b_1, 2t(2A+1)b_2, \cdots, 2t(2A+1)b_{w+1}] \\
&= [tA(A+1)(2A+1), 2t(2A+1)b_1, 2t(2A+1)b_2, \cdots, 2t(2A+1)b_{w+1}] \\
&= 2t(2A+1)[w, b_1, b_2, \cdots, b_{w+1}] = 2t(2A+1)\left(1+\sum_{j=1}^{w+1} b_j\right) \\
&= tA + t(A+1) + t(2A+1) + 2t(2A+1)\sum_{j=1}^{w+1} b_j \\
&= B + t(A+1) + t(2A+1) + 2t(2A+1)\sum_{j=1}^{w+1} b_j = B_s
\end{aligned}
$$

综上所述, 命题成立. □

评注 对于上述证明, 需要做出如下两点解释:

(1) 情形 2 的讨论是必要的, 因为存在某个 $d_i = A$ 的特殊情形.

(2) 引理中 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1} > 1$ 原因如下: 如果存在 $b_i (i = 1, 2, \cdots, k+1)$ 使得 $b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}, k$ 互不相等且满足 $b_1 = 1$, $[b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}, k] = \sum\limits_{i=1}^{k+1} b_i + 1$. 则递归构造后由于 $a_1 = (k+1)b_1 = k+1$, 这与 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+2}, k+1$ 互不相等矛盾.

为了保证 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1} > 1$, 奠基必须要有 $k=2$ 的情形, 否则由 $k=1$ 推到 $k=2$ 时构造得到 $a_3 = 1$.

下面介绍关于问题 2 的另一个解答.

这里感谢肖澍旸同学给作者提供了一个精巧简洁的妙解, 这个做法很好地利用了 A_m^n ($A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ 表示从 m 个不同的数中取 n 个数的排列的个数, 这里 $m \geq n$) 差分形式的整除性质, 从而确定了最小公倍数.

证法二 (雅礼中学 肖澍旸)

设给定的正整数有限集合为 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$, 设 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$, $T = \prod\limits_{i=1}^{n} d_i$.

若 $T \leq 2$, 则 $D = \{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1, 2\}$. 由 $1+2+3 = [1, 2, 3]$, 故 $\{1, 2, 3\}$ 为好集, 成立.

若 $T \geq 3$, 则 $6 \mid T!$. 令

$$K = D \cup \{(A_T^1 - A_T^0)S, (A_T^2 - A_T^1)S, \cdots, (A_T^{T-1} - A_T^{T-2})S\}.$$

下面证明 K 为好集. 显然 K 中元素互不相等.

设 K 的所有元素的和为 S_K, 所有元素的最小公倍数为 T_K.

一方面,

$$S_K=\sum_{i=1}^{n}d_i+\sum_{i=1}^{T-1}(A_T^i-A_T^{i-1})S=S+(A_T^{T-1}-A_T^0)S=S\cdot T!.$$

另一方面, 当 $m=1,2,\cdots,T-1$ 时, 由于

$$\begin{aligned}A_T^m-A_T^{m-1}&=T(T-1)\cdots(T-m+1)-T(T-1)\cdots(T-m+2)\\&=T(T-1)\cdots(T-m+2)(T-m),\end{aligned}$$

所以 $A_T^m-A_T^{m-1}\mid T!$, 又由于 $d_i\mid T!$, 从而

$$T_K\mid S\cdot T!,\ T_K\leq S\cdot T!.\tag{1}$$

又由于 $T\geq 3$, $6\mid T!$, 故

$$[(A_T^{T-1}-A_T^{T-2})S,(A_T^{T-2}-A_T^{T-3})S]=[\frac{1}{2}S\cdot T!,\frac{1}{3}S\cdot T!]=S\cdot T!.$$

从而

$$S\cdot T!\mid T_K,T_K\geq S\cdot T!.\tag{2}$$

结合 (1),(2) 知 $T_k=T!\cdot S$.

因此 $T_k=S\cdot T!=S_K$, 故 K 为好集. 证毕! □

评注 可以看出, 这一构造极具巧思, 利用的东西并不多, 但需要对排列数足够熟悉, 构造很见功力. 可以见得妙解一般十分精巧, 但难以想到. 因此我们在欣赏妙解的同时还应去寻找通法.

最后感谢读者的阅读, 文中如有不恰当或错误之处, 希望读者不吝指正.