一道伊朗国家队选拔考试数论题的注记

罗振华[1]　付云皓[2]

(1. 上海四季教育, 200070; 2. 广州第二师范学院, 510303)

2018 年伊朗国家队选拔考试第一轮第五题的数论题题目新颖漂亮, 具有一定难度. 题目如下:

题目. 证明: 对每个正整数 m, 我们可以找到 m 个连续正整数, 使得对其中的每一个数 n,

$$\left(1^3+2018^3\right)\left(2^3+2018^3\right)\cdots\left(n^3+2018^3\right)$$

所表示的数均不是整数的大于 1 次幂.

本文给出两种不同的解法. 证法一由罗振华给出, 证法二由付云皓给出.

法一主要利用了 Gauss 二次互反律来分析每一项的素因子的信息, 通过取特定的素数 p, 使得整个式子含 p 的幂次恰为 1, 从而证明了它不是整数的大于 1 次幂. 不过二次互反律很多中学生不太熟悉, 我国数学竞赛的数论题也很少考察这部分内容, 那能否绕开二次互反律证明此题呢？解 2 给出了不用二次互反律的新解, 此解法技巧性很强.

证法一 先证明如下两个引理:

引理 1. 设 p 是大于 2 的素数, 则 $(\frac{-3}{p})=1$ 当且仅当 $p\equiv 1 \pmod 3$, 其中 $(\frac{d}{p})$ 是 Legendre 符号.

引理 1 的证明 注意到

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\left(\frac{-3}{p}\right),$$

由 Gauss 二次互反律,

$$\left(\frac{3}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}=(-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

故

$$\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right).$$

收稿日期: 2018-04-26.

则有

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=(-1)^{p-1}\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{p}{3}\right).$$

所以

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{p}{3}\right)=1\Leftrightarrow p\equiv 1\pmod 3,$$

引理 1 获证. □

引理 2 对于任意正整数 x, $x^2-2018x+2018^2$ 的素因子只可能是 2,3,1009 和 $3k+1$ 型的素数 (其中 k 为正整数).

引理 2 的证明 对任意正整数 x, 设素数 $p\mid x^2-2018x+2018^2$, 则 $p\mid (x-1009)^2+3\cdot 1009^2$.

当 $p\neq 2,3,1009$ 时, $(x-1009)^2\equiv -3\cdot 1009^2\pmod p$. 由 $(p,1009)=1$, 可设 1009 模 p 的逆是 a, 则

$$(ax-1009a)^2\equiv -3\pmod p,$$

这说明 $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$, 由引理 1 有 $p\equiv 1\pmod 3$. 故引理 2 获证. □

回到原题. 由 Dirichlet 定理知, $3k-1$ 型的素数有无穷多个, 任取其中大于 2018 的素数 p, 我们说明对于 $p-2018\leq n\leq 2p-2019$,

$$\left(1^3+2018^3\right)\left(2^3+2018^3\right)\cdots\left(n^3+2018^3\right)$$

表示的数均不是整数的幂.

注意到

$$\begin{aligned}\prod_{x=1}^{n}(x^3+2018^3)&=\prod_{x=1}^{n}(x+2018)(x^2-2018x+2018^2)\\&=\prod_{x=1}^{n}(x+2018)\prod_{x=1}^{n}(x^2-2018x+2018^2),\end{aligned}$$

由引理 2, 对任意整数 x, 大于 2018 的 $3k-1$ 型的素数 p 不是 $x^2-2018x+2018^2$ 的素因子. 注意到 $p-2018\leq n\leq 2p-2019$, 则 2019 至 $n+2018$ 这连续 n 个数中恰有一个是 p 的倍数, 就是 p 本身. 故 $(1^3+2018^3)(2^3+2018^3)\cdots(n^3+2018^3)$ 中 p 的幂次恰为 1, 不可能是整数的幂.

注意到 $p-2018$ 到 $2p-2019$ 共有 p 个连续自然数. 对于任意正整数 m, 取 $3k-1$ 型的素数 $p>\max\{m,2018\}$ 就可以找到 p 个连续自然数满足题目条件, 当然也有 m 个连续自然数满足题目条件.

综上可知, 命题获证. □

证法二 我们先证明下面的两个引理.

引理 1. 设 $f(x)$ 是一个非常数的整系数多项式, 则有无穷多个素数 p 满足如下性质: 存在正整数 n 使得 $p \mid f(n)$.

引理 1 的证明 假设仅有有限多个素数 p 满足上述性质, 设它们是 $p_1, \cdots, p_k$. 设 $|f(1)| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是非负整数, 则由 $m-n \mid f(m)-f(n)$ 可知

$$p_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1} \mid f(Ap_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}+1) - f(1),$$

其中 A 是任意正整数.

由上式知 $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \mid f(Ap_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}+1)$, 且

$$p_1 \cdots p_k \mid \frac{f(Ap_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}+1)}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}} \pm 1.$$

这说明 $\frac{f(Ap_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}+1)}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}$ 是一个与 $p_1, \cdots, p_k$ 均互素的整数, 故它仅能为 1 或 -1, 即

$$\left|f(Ap_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}+1)\right| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

由 A 的任意性知 f 在无穷多个点处的取值相同, 故 f 仅能为常数, 矛盾!

引理 2. 对于任意正整数 a, 存在正整数 M, 使得对任意素数 $p > M$ 和正整数 n, 素数 p 最多整除 $n^2 - 2018n + 2018^2$, $(n+1)^2 - 2018(n+1) + 2018^2$, $\cdots$, $(n+a)^2 - 2018(n+a) + 2018^2$ 中的一个数.

引理 2 的证明 取 $M = (a+2018)^2 + 4036(a+2018) + 4036^2$, 当 $p > M$ 时, 我们证明 p 满足条件. 假设结论不成立, 设素数 p 整除引理中数列的两个不同的数, 不妨设

$$p \mid (n+i)^2 - 2018(n+i) + 2018^2,\ p \mid (n+j)^2 - 2018(n+j) + 2018^2,$$

其中 $0 \le i < j \le a$, 两式相减得 $p \mid (j-i)(2n+i+j-2018)$. 由于

$$p > (a+2018)^2 + 4036(a+2018) + 4036^2 > a,$$

由上式可推出 $p \mid 2n+i+j-2018$, 则

$$\begin{aligned}&4\left((n+i)^2 - 2018(n+i) + 2018^2\right)\\ \equiv&(i-j+2018)^2 - 4036(i-j+2018) + 4036^2 \pmod p.\end{aligned}$$

上面同余式的左边是 p 的倍数, 而右边大于 0, 故右边不小于 p. 注意到

$$\begin{aligned}p &> (a+2018)^2 + 4036(a+2018) + 4036^2\\ &> (i-j+2018)^2 - 4036(i-j+2018) + 4036^2,\end{aligned}$$

则同余式右边小于 p, 矛盾! 故假设不成立, 引理 2 获证. □

回到原题 在引理 2 中取 $a=m$ 得到相应的 M, 在引理 1 中取 $f(x)=x^2-2018x+2018^2$ 知, 存在素数

$$p>\max\{M,\ 2m+3\cdot 2018,\ 2018^2\}$$

及正整数 n, 使得 $p\mid f(n)$.

设最小的满足 $p\mid f(n)$ 的正整数 n 为 n_0, 则 n_0 满足 $n_0\le p$. 事实上, 若 $n_0>p$, 则 $f(n_0-p)\equiv f(n_0)\equiv 0\pmod p$, 故 n_0-p 为更小的满足 $p\mid f(n)$ 的正整数, 与最小性矛盾.

进一步有 $n_0\le\frac{p+2018}{2}$. 事实上, 若 $n_0>\frac{p+2018}{2}$, 则有

$$f(p+2018-n_0)\equiv f(2018-n_0)\equiv f(n_0)\equiv 0\pmod p,$$

而 $p+2018-n_0<n_0$, 这说明 $p+2018-n_0$ 为更小的满足条件的正整数, 矛盾!

由 $p>2m+3\cdot 2018$ 知

$$n_0+m+2018\le\frac{p+2018}{2}+m+2018<p.$$

结合 $n_0<p,p>2018^2$ 知

$$0<f(n_0)<n_0^2+2018^2\le(p-1)^2+2018^2=p^2-2p+1+2018^2<p^2.$$

考虑

$$(1^3+2018^3)(2^3+2018^3)\cdots(x^3+2018^3),$$

其中 $x\in\{n_0,n_0+1,\cdots,n_0+m\}$, 则由上面推理知 $1+2018,2+2018,\cdots,x+2018$ 均不是 p 的倍数, 而对 $f(r)(r=1,2,\cdots,x)$, 由 n_0 的最小性知, $r<n_0$ 时 $f(r)$ 不是 p 的倍数, 由引理 2 及 $p\mid f(n_0)$ 知对 $r=n_0+1,\cdots,x$, $f(r)$ 不是 p 的倍数, 又 $0<f(n_0)<p^2$, 故

$$\left(1^3+2018^3\right)\left(2^3+2018^3\right)\cdots\left(x^3+2018^3\right)$$

中 p 的幂次为 1, 故它不能是任何整数的大于 1 次幂, 证毕. □

评注 比较一下两种证法, 证法一通过分析 $x^2-2018x+2018^2$ 的素因子信息, 取素数 p 使得它不是任何 $x^2-2018x+2018^2$ 的素因子, 再限定 n 的取值范围, 使得 $1+2018,2+2018,\cdots,n+2018$ 只有一个 p 的倍数且幂次为 1, 从而证明了题目中的数不是整数的大于 1 次幂. 证法二也是取特定的素数 p 使得题设中的数所含 p 的幂次为 1, 不过不同于证法一取一次项的素因子, 这里 p 取为具有最小性的某个二次项 $x^2-2018x+2018^2$ 的素因子, 然后通过很有技巧性的估值排除了 p 是其他项的素因子的可能, 从而证得了结论.