数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

对数凹多项式应用与介绍

倪弘康　孙孟越

(华东师范大学第二附属中学, 201203)

我们先来看两个试题. 第一个是一道 **ICM** (International Mathematical Competition for University Students) 试题:

问题 1. 设 k 是一个正整数. 对每个非负整数 n ,定义 $f(n)$ 是不等式 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\le n$ 的整数解 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in\mathbb{Z}^k$ 的个数. 求证: 对任意正整数 n 有 $f(n-1)\cdot f(n+1)\le f(n)^2$.

证明 我们先试着求出 $f(n)$ 的显示表达. 我们可以采用母函数或者组合手段, 这里我们采用后者.

当 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 中恰有 $m(0\le m\le k)$ 个非零项时, 其非零项用所谓的“插板法”可以求出有 $\binom{n}{m}\cdot 2^m$, 而非零项的位置选择共有 $\binom{k}{k-m}$ 种. 故我们得到

$$f(n)=\sum_{m=0}^{k}\binom{n}{n-m}\cdot\binom{k}{m}\cdot 2^m.$$

可以发现 $f(n)$ 正好是多项式 $Q_n(x)\overset{\text{def}}{=}(1+x)^n(1+2x)^k$ 的 x^n 项系数.

设多项式 $Q_{n-1}(x)=(1+x)^{n-1}(1+2x)^k$ 的 x^{n-1},x^n,x^{n+1} 项系数分别为 a_{n-1},a_n,a_{n+1}, 则 $f(n-1)=a_{n-1}$. 由 $Q_n(x)=(1+x)Q_{n-1}(x)$ 知, $f(n)=a_{n-1}+a_n$. 由 $Q_{n+1}(x)=(1+2x+x^2)Q_{n-1}(x)$ 知, $f(n+1)=a_{n-1}+2a_n+a_{n+1}$. 进而

$$\begin{aligned}
&f(n-1)f(n+1)\le f(n)^2\\
\Leftrightarrow\ &a_{n-1}(a_{n-1}+2a_n+a_{n+1})\le(a_n+a_{n-1})^2\\
\Leftrightarrow\ &a_{n-1}a_{n+1}\le a_n^2.
\end{aligned}$$

这时候, 问题转化为 $Q_{n-1}(x)$ 的系数上来. 但单项系数并不容易处理. 我们猜测可能 $Q_{n-1}(x)$ 的每一项 x^i 的系数 a_i 都满足 $a_{i-1}a_{i+1}\le a_i^2$.

收稿日期: **2018-04-06;**　修订日期: **2018-04-25.**

我们可以建立如下命题: 称一个实系数多项式 $P(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k$ 为对数凹的, 若 $b_n^2\geq b_{n-1}b_{n+1}$ 对所有正整数 $1\leq n\leq k-1$ 成立.

引理 若正系数多项式 $P(x)$ 是对数凹的, 则 $(1+x)P(x)$ 也是正系数多项式, 且 $(1+x)P(x)$ 是对数凹的.

引理证明 显然 $(1+x)P(x)$ 是正系数多项式. 事实上,

$$(1+x)P(x)=b_0+(b_0+b_1)x+(b_1+b_2)x^2+\cdots+(b_k+b_{k-1})x^k+x_{k+1}.$$

当 $n=1$ 时, 我们有 $(b_0+b_1)^2\geq b_0(b_1+b_2)\Leftarrow b_1^2\geq b_0b_2$.

当 $1<n<k$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}&(b_{n-1}+b_n)^2-(b_{n-2}+b_{n-1})(b_n+b_{n+1})\\=&(b_{n-1}^2-b_{n-2}b_n)+(b_nb_{n-1}-b_{n-2}b_{n+1})+(b_n^2-b_{n-1}b_{n+1}).\end{aligned}\tag{1}$$

由于 $b_{n-1}^2\geq b_{n-2}b_n>0,b_n^2\geq b_{n-1}b_{n+1}>0$, 两式相乘得到

$$b_nb_{n-1}\geq b_{n-2}b_{n+1}>0,$$

故 $b_nb_{n-1}-b_{n-2}b_{n+1}\geq 0$, 因此 (1) 右端 3 个括号均为非负实数, (1) 右边 ≥ 0 .

当 $n=k$ 时, 类似于 $n=1$ 的情形. 引理成立.

回到原题. 不难验证 $(1+2x)^k$ 是正系数多项式, 且是对数凹的. 由引理及归纳法知, 正系数多项式 $(1+x)^{n-1}(1+2x)^k$ 也是对数凹的. 结论成立. □

同样的技术可以应用在如下一道 **AMM** (The American Mathematical Monthly) 征解题中.

问题 2. 设 s,t 是给定的自然数, $s\leq t$, 令

$$a_n=\binom{n}{s}+\binom{n}{s+1}+\cdots+\binom{n}{t}.$$

证明: $a_n^2\geq a_{n-1}a_{n+1},\forall n\geq 1,n\in\mathbb{Z}^+$.

证明 称一个实系数多项式 $P(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k$ 为对数凹的, 若 $b_n^2\geq b_{n-1}b_{n+1}$ 对所有正整数 $1\leq n\leq k-1$ 成立.

引理 若正系数多项式 $P(x)$ 是对数凹的, 则 $(1+x)P(x)$ 也是正系数多项式, 且 $(1+x)P(x)$ 是对数凹的.

引理证明同上一题.

回到原题. 对任意的 n , 我们记 $f(n,u)$ 为多项式 $(1+x)^n(1+x+x^2+\cdots+x^{t-s})$ 的 x^u 项系数.

考虑一个固定的 n , 则有 $a_n = \binom{n}{s} + \binom{n}{s+1} + \cdots + \binom{n}{t} = f(n,t)$. 并且注意 $f(n,t) = f(n-1,t) + f(n-1,t-1)$. 故

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= f(n-1,t), \\ a_n &= f(n-1,t) + f(n-1,t-1), \\ a_{n+1} &= f(n+1,t) = f(n,t) + f(n,t-1) \\ &= f(n-1,t) + 2f(n-1,t-1) + f(n-1,t-2). \end{aligned}$$

则我们有

$$a_n^2 \geq a_{n+1}a_{n-1} \Leftrightarrow f(n-1,t-1)^2 \geq f(n-1,t-2)f(n-1,t).$$

由于正系数多项式 $1 + x + x^2 + \cdots + x^{t-s}$ 是对数凹的, 由引理得到正系数多项式 $(1+x)^{n-1}(1 + x + x^2 + \cdots + x^{t-s})$ 也是对数凹的, 这推出 $f(n-1,t-1)^2 \geq f(n-1,t-2)f(n-1,t)$. 结论成立. □

其实, 在组合、代数、几何、计算机科学、概率、统计中, 对数凹序列经常出现. 在文献 [5] 的记号下, 对数凹的定义与我们给出的定义相同. 上述证明过程中可以看出 $P(x)$ 的系数是正的是不能删去的. 实际上, 在文献 [5] 及更广泛的研究中, 这一条件被无中间零项 (no internal zero) 所取代 (即对数列 $\{a_i\}$,不存在下标 $i < j < k$ 使得 $a_i \neq 0, a_j = 0, a_k \neq 0$).

定理 . *若 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是正系数多项式且是对数凹的, 则 $P(x) \cdot Q(x)$ 也是对数凹的.*

事实上, 这个定理曾在文 [1], [2] (第 8 章节, 定理 1.2),[3], [4] 中出现. 本文两位作者也提出了这个问题, 倪弘康也独立给出了这个定理的证明, 他给出的证明与 [1] 中的证明本质相同. 应用此定理, 可以立刻得到题目中的上面两个题目中的引理.

参考文献

[1] Woong, Kook. *On the Product of Log-concave Polynomials*[J]. INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, (6)2006.

[2] S. Karlin. *Total Positivity*[M]. vol. I. Stanford University Press, 1968.

[3] K.V. Menon. *On the Convolution of Logarithmically Concave Sequences*[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, (23)1969: 439-441.

[4] R. Stanley. *Log-concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry*[J]. Annals of the New York Academy of Sciences, (576)1989: 500-535.

[5] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*[M]. Cambridge University Press, 1997.