2018 年夏季上海新星数学奥林匹克试题解析

罗振华[1] 孙孟越[2] 吴尉迟[3]
(1. 上海四季教育, 200070; 2. 华东师大二附中, 201203; 3. 上海大学, 200444)

2018 年夏季上海新星数学奥林匹克于 2018 年 6 月 4 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答.

I. 试 题

1. 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 满足:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2018} = 1007,\ 且\ |x_{i+1} - x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \cdots, 2017.$$

求 $x_2 + x_4$ 的最大值.

(杭州第二中学 赵斌 供题)

2. 已知 $\triangle ABC$ 是非等腰锐角三角形 $(AB > AC)$, $\odot O$ 是其外接圆, M 是 BC 中点, A_1 是 $\odot O$ 上 A 的对径点, D, E 分别是边 AB, AC 延长线上的点且满足 $BD = AB, CE = AC$. A_2 (不同于 A_1) 是 $\odot O$ 与 $\triangle A_1DE$ 的外接圆交点. 证明: $\angle AMC = \angle A_2MC$.

(上海四季教育 罗振华 供题)

3. 设 n 是大于 27 的整数, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非常数的等差数列, $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 满足 $\frac{m}{n} \geq \frac{7}{9}$. 证明: 集合

$$A = \left\{b_i + b_j \,\middle|\, 1 \leq i, j \leq m\right\}$$

中存在项数不小于 n 的等差数列.

(上海大学 吴尉迟 供题)

收稿日期: 2018-06-06.

4. 给定奇素数 p. 称一个至多 $p-1$ 次的多项式 $F(x)$ 是"美的", 如果对任意与 p 互质的整数 a,b, 都有 $\frac{1}{p}(F(a)+F(b)-F(ab))$ 是整数.

(i) 证明: 存在一个最高次项系数是 $\frac{1}{p}$ 的美的多项式.

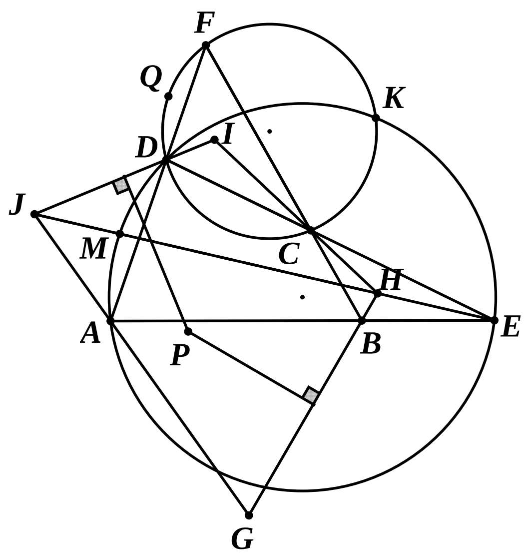
(ii) 若 $f(x)$ 是美的整系数多项式. 证明: 存在整数 t 使得 $\frac{1}{p}(f(x)+tx^{p-1}-t)$ 是整系数多项式.

(华东师大二附中 孙孟越 供题)

5. 一个 $3n$ 个点的平面点集叫做"弱紧集", 如果其中任意 $n+1$ 个点中有两点的距离为 1. 求弱紧集中距离为 1 的点对数目的最小值.

(温州乐成寄宿中学 周一正 羊明亮 供题)

6. 对边不平行的凸四边形 $ABCD$ 中, AB 延长线与 DC 延长线交于 E, AD 延长线与 BC 延长线交于 F. K 是 $\triangle CDF$ 的外接圆与 $\triangle ADE$ 的外接圆的交点 ($K \neq D$). 四边形 $ABCD$ 的四条外角平分线交成凸四边形 $GHIJ$ (如图). $\triangle CDF$ 的外接圆中, 弧 DF (不含 C) 的中点为 Q, 直线 EJ 与 $\triangle AED$ 的外接圆交于 M. 设 GH 的中垂线与 JI 的中垂线 (不重合) 交于 P, 证明: P,M,Q,K 共圆.



(温州中学 欧阳泽轩 供题)

Ⅱ. 解 答

题 1. 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 满足:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2018} = 1007,\ \text{且}\ |x_{i+1} - x_i| \leq 1,\ i = 1, 2, \cdots, 2017.$$

求 $x_2 + x_4$ 的最大值.

解 由 $|x_{i+1} - x_i| \leq 1$ 可以得到

$$x_1 \geq x_2 - 1,\ x_5 \geq x_4 - 1,\ x_6 \geq x_4 - 2, \cdots, x_{2018} \geq x_4 - 2014,$$

则

$$1007 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2018} \geq 2x_2 + x_3 + 2015x_4 - 1 - \frac{2014 \cdot 2015}{2},$$

又 $x_3 \geq x_2 - 1, x_4 \geq x_2 - 2$, 从而

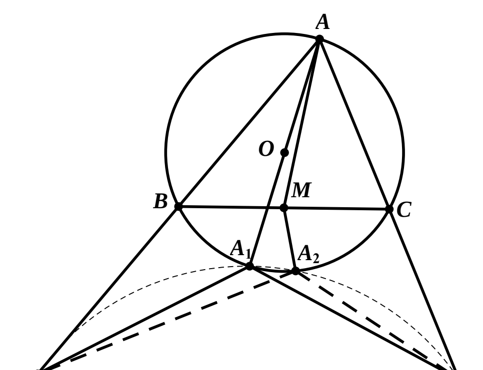
$$\text{上式右边} \geq 1009x_2 + 1009x_4 - 1006 \cdot 2 - 1 - 1 - \frac{2014 \cdot 2015}{2},$$

计算可得 $x_2 + x_4 \leq 2014$.

等号当 $x_1 = 1007, x_k = 1010 - k, k \geq 2$ 时取到. □

评注 这是一道基础的不等式问题, 有 60% 的同学做对此题. 本题的思路是利用 $|x_{i+1} - x_i| \leq 1$ 把 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2018}$ 放缩为关于 $x_2 + x_4$ 的一次多项式, 由每一步不等式的取等条件得到 $x_2 + x_4$ 取最大值时的取等条件: $x_1 = 1007, x_k = 1010 - k, k \geq 2$.

题 2. 已知 $\triangle ABC$ 是非等腰锐角三角形 $(AB > AC)$, $\odot O$ 是其外接圆, M 是 BC 中点, A_1 是 $\odot O$ 上 A 的对径点, D, E 分别是边 AB, AC 延长线上的点且满足 $BD = AB, CE = AC$. A_2 (不同于 A_1) 是 $\odot O$ 与 $\triangle A_1DE$ 的外接圆交点. 证明: $\angle AMC = \angle A_2MC$.

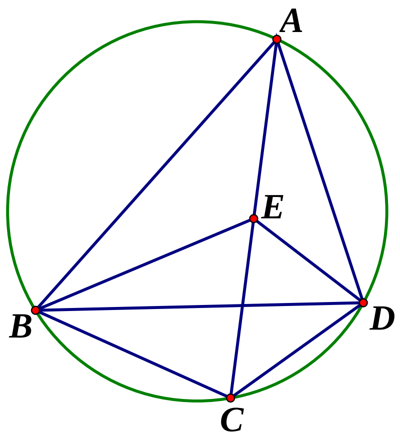


证法一 (罗振华) 我们称对边乘积相等的圆内接四边形称为调和四边形, 后续证明中将直接使用调和四边形的如下性质.

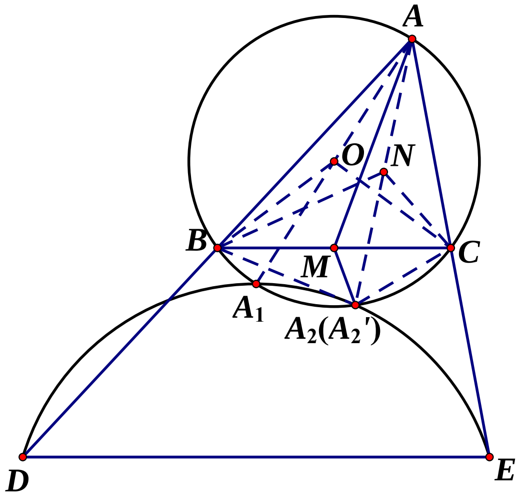
引理 已知 $ABCD$ 是调和四边形, E 是 AC 中点, 则有如下几何性质:

$$\triangle AEB \sim \triangle DEA,\ \triangle CEB \sim \triangle DEC;$$

$$\angle BEA = \angle DEA,\ \angle BEC = \angle DEC.$$



回到原题. 在 $\odot O$ 的 BC 弧 (不含 A) 上取一点 A_2', 使得 $ABA_2'C$ 构成调和四边形 (这样的 A_2' 是唯一确定的). 取 AA_2' 的中点 N, 连结 OB, OC, NB, NC.



由引理, $\triangle ABN \sim \triangle CAN$, $\angle BNA_2' = \angle CNA_2'$. 故 $\angle ABN = \angle CAN$. 则

$\angle BNC = 2\angle BNA_2' = 2(\angle ABN + \angle NAB) = 2(\angle NAC + \angle NAB) = 2\angle BAC$.

又 $\angle BOC = 2\angle BAC$, 故 B, O, N, C 四点共圆.

以 A 为位似中心, 2 为位似比作位似变换. 则

$$B \to D, O \to A_1, N \to A_2', C \to E.$$

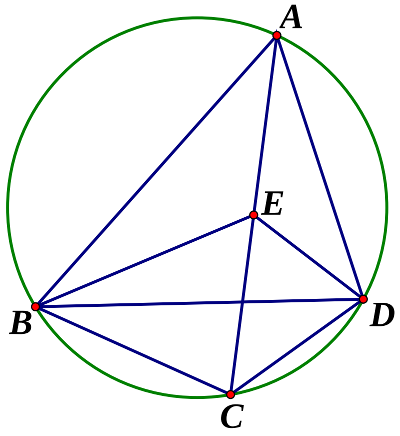
那么 D, A_1, A_2', E 四点共圆. 这说明 $A_2 = A_2'$. 则 ABA_2C 是调和四边形, 由引理可知 $\angle AMC = \angle A_2MC$. □

证法二 (孙孟越) 我们称对边乘积相等的圆内接四边形称为调和四边形, 后续证明中将直接使用调和四边形的如下性质.

引理 已知 $ABCD$ 是圆内接四边形, E 是 AC 中点, 则有:

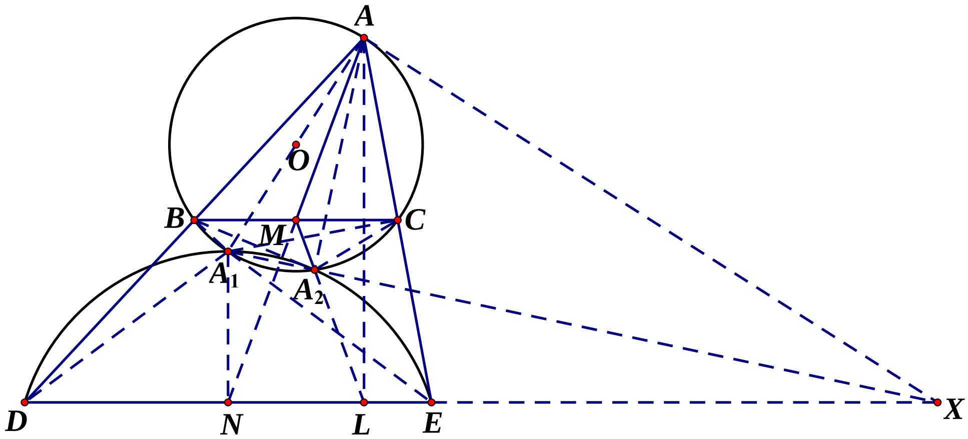
① $ABCD$ 是调和四边形当且仅当 $\angle ABE = \angle CBD$;

② $ABCD$ 是调和四边形当且仅当 $\angle BEC = \angle DEC$.



回到原题. 连结 A_1A_2 并延长交 DE 延长线于 X, 连结 AE.

取 DE 中点 N, 连结 $AN, A_1N, AA_1, A_1B, A_1C, A_1D, A_1E$. 过 A 作 DE 的垂线, 垂足为 L, 连结 AL, A_2L.



记 $\triangle ADE$ 的外接圆为 ω_1, $\triangle A_1DE$ 的外接圆为 ω_2. 那么 A_1A_2 为 $\odot O$ 与 ω_2 的根轴, DE 为 ω_1 与 ω_2 的根轴.

过 A 作 $\odot O$ 的切线 l, 则 l 也是 ω_1 的切线. 从而 l 是 $\odot O$ 与 ω_1 的根轴. 由蒙日定理, A_1A_2, DE 与 l 三线共点. 这说明 l 经过点 X, 则 AX 是 $\odot O$ 的切线. 故 $\angle A_1AX = 90°$.

注意到 $BC /\!/ DE, M, N$ 分别是 BC, DE 的中点. 所以, A, M, N 三点共线. 又 $AB = BD, A_1B \perp AD$. 故 $A_1A = A_1D$. 同理可知 $A_1A = A_1E$. 则 $A_1D = A_1E$.

注意到 N 是 DE 中点, 所以 $\angle A_1NX = 90^\circ$. 这说明 A, A_1, N, X 四点共圆. 所以 $\angle AA_1N = \angle A_1XD$.

又因为 A_1A 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle AA_2A_1 = \angle AA_2X = 90^\circ$. 故 A, A_2, L, X 四点共圆. 则有 $\angle AA_2L = \angle A_2XL = \angle A_1XD$. 这说明 $\angle A_1AN = \angle A_2AL$.

而 $\angle LAE = 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAA_1$. 所以

$$\angle BAM = \angle BAA_1 + \angle A_1AN = \angle LAC + \angle A_2AL = \angle CAA_2.$$

由引理, ABA_2C 是调和四边形. 故 $\angle AMC = \angle A_2MC$. □

评注 这是一道简单而优美的几何题, 约 70% 的同学做对了此题. 本题的背景是调和四边形, 问题相当于证明 ABA_2C 是调和四边形. 本题的入手点非常多, 大部分同学直接或间接使用调和四边形的几何性质证明了结论. 证法一的关键是取 AA_2 的中点 (题目条件中出现了很多中点), 利用调和四边形的几何性质和位似不改变共圆性得到了结论. 证法二的关键是找出三个圆的根心, 通过导角得出 AM, AA_2 是关于 $\angle BAC$ 的等角线, 利用调和四边形的几何性质证得了结论.

题 3. 设 n 是大于 27 的整数, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非常数的等差数列, 数列 $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\} \subseteq \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 满足 $\frac{m}{n} \geq \frac{7}{9}$. 证明: 集合

$$A = \left\{ b_i + b_j \,\middle|\, 1 \leq i, j \leq m \right\}$$

中存在项数不小于 n 的等差数列.

证明 由于将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这个等差数列整体平移或同乘以非零常数倍不影响题目的讨论, 故不妨设 $a_i = i, 1 \leq i \leq n$.

则 $2 \leq a_i + a_j \leq 2n$, 故 A 中的元素为不超过 $2n$ 的正整数.

记 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$. 若正整数 $x \leq 2n$ 不属于 A, 分两种情况讨论:

1) 当 $x \leq n$ 时, 考虑数组 $\{j, x-j\}(1 \leq j \leq \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)$, 它们是两两不交的.

由于 $x \notin A$, 则 B 不能同时包含数组 $\{j, x-j\}(1 \leq j \leq \lfloor \frac{x}{2} \rfloor)$ 中的两个元素. 因此

$$|\{1, 2 \cdots, n\} \backslash B| \geq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor,$$

结合条件知, $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \leq \frac{2n}{9}$. 即有 $x \leq \frac{4n}{9} + 2$.

2) 当 $n \leq x \leq 2n$ 时, 考虑数组 $\{j, x-j\}(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \leq j \leq n)$, 类似地, 我们有 $n - \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + 1 \leq \frac{2n}{9}$. 则有 $x \geq \frac{14n}{9}$.

综上可知, 当 $\frac{4n}{9}+2<x<\frac{14n}{9}$ 时, 有 $x\in A$. 注意到 $n>27$,这个区间的整数个数至少为

$$\frac{14n}{9}-(\frac{4n}{9}+2)-1=\frac{10n}{9}-3>n.$$

这说明 A 包含项数不少于 n 的等差数列. □

评注 此题是一道中等难度的题, 约 20% 的同学做对了此题. 此题是等差数列子列的 Minkowski 和的一个性质. 这个问题的关键是考虑不在 A 中的元素 x 的性质, 通过和为 x 的两数不能同时出现在 B 中可以估计出 x 的取值范围, 最后可以找到中间一段长为 n 的等差数列.

题 4. 给定奇素数 p. 称一个至多 $p-1$ 次的多项式 $F(x)$ 是"美的", 如果对任意与 p 互质的整数 a,b, 都有 $\frac{1}{p}(F(a)+F(b)-F(ab))$ 是整数.

(i) 证明: 存在一个最高次项系数是 $\frac{1}{p}$ 的美的多项式.

(ii) 若 $f(x)$ 是美的整系数多项式. 证明: 存在整数 t 使得 $\frac{1}{p}(f(x)+tx^{p-1}-t)$ 是整系数多项式.

证明 (i) 由费马小定理, 对任意与 p 互素的整数 x, 有 $f(x)=\frac{x^{p-1}-1}{p}$ 是整数. 并且对任意与 p 互质的整数 a,b,

$$\frac{1}{p}\Big(f(a)+f(b)-f(ab)\Big)=-\frac{(a^{p-1}-1)}{p}\cdot\frac{(b^{p-1}-1)}{p}=-f(a)f(b)\in\mathbb{Z}.$$

故 $f(x)$ 是满足要求的多项式.

(ii) 由题设知对任意与 p 互素的整数 a , 有 $\frac{1}{p}(2f(a)-f(a^2))$ 是整数, 故 $f(a^2)\equiv 2f(a)\pmod p$.

若对正整数 n 及与 p 互素的整数 a , 有 $f(a^n)\equiv nf(a)\pmod p$. 由题设可知 $\frac{1}{p}(f(a^n)+f(a)-f(a^{n+1}))$ 是整数, 故

$$f(a^{n+1})\equiv f(a^n)+f(a)\equiv(n+1)f(a)\pmod p.$$

利用上述性质并结合归纳法不难证明对任意正整数 n及与 p 互素的整数 a, 都有 $f(a^n)\equiv nf(a)\pmod p$.

特别地, 取 $p\nmid a$, 以及 $n=p$, 得到

$$f(a)\equiv f(a^p)\equiv pf(a)\equiv 0\pmod p.$$

上式第一个同余号, 用到了费马小定理 $a^p\equiv a\pmod p$, 以及 f 是一个整系数多项式.

故对任意 $a=1,2,\ldots,p-1$, 有 $p\mid f(a)$. 而由费马小定理, 有 $p\mid a^{p-1}-1$.

设 $-f(x)$ 的 $(p-1)$ 次项系数为 t (t 是整数), 由于 f 至多 $(p-1)$ 次, 则 $(f(x)+tx^{p-1}-t)$ 是一个至多 $(p-2)$ 次的多项式, 由前面证得的结论知, 其在 $x=1,2,\ldots,p-1$ 处的值都是 p 的倍数.

又 p 是素数, 由 Lagrange 定理, $(f(x)+tx^{p-1}-t)$ 必为模 p 意义下的零多项式, 则 $\frac{1}{p}(f(x)+tx^{p-1}-t)$ 是整系数多项式. $\square$

评注 有 21% 的同学做对此题. 此题背景是费马商 (Fermat Quotient) 的性质的逆问题, 第 (i) 问中给出的多项式即为费马商. 进一步, 可以发现加上整系数的条件后, f 可被完全刻画, 这就是本题的第 (ii) 问.

第 (ii) 问中, 还可以用如下构造缩系的方法得到 $p\mid f(a)$, $\forall\, 1\le a\le p-1$:

在条件式中取定与 p 互质的整数 a, 再取遍 $b=1,2,\cdots,p-1$ 并求和, 得

$$(p-1)f(a)\equiv\sum_{b=1}^{p-1}f(ab)-\sum_{b=1}^{p-1}f(b)\pmod p.$$

由于 p 是素数, 并且 a,p 互质, 故 $a,2a,\cdots,(p-1)a$ 构成模 p 的缩系. 并由于 f 是整系数多项式, 我们得到

$$\sum_{b=1}^{p-1}f(ab)\equiv\sum_{b=1}^{p-1}f(b)\pmod p,$$

这推出 $p\mid f(a)$.

题 5. 一个 $3n$ 个点的平面点集叫做"弱紧集", 如果其中任意 $n+1$ 个点中有两点的距离为 1. 求弱紧集中距离为 1 的点对数目的最小值.

解 所求最小值为 $3n$.

一方面, 在平面上取 n 个边长为 1的正三角形, 使得任意两个不同的正三角形的中心的距离都大于 100. 则任意两个不同的正三角形的顶点距离大于 1, 故图中恰有 $3n$ 个距离为 1 的点对. 而任 $n+1$ 个点中, 必有两点是同一正三角形的两个顶点, 它们的距离为 1, 故此构造满足条件.

另一方面, 证明这 $3n$ 个点中距离为 1 的点对至少有 $3n$ 对.

将这 $3n$ 个点对应图 G 中的 $3n$ 个点, 若两点距离为 1, 则将它们在图 G 中的对应点相连. 于是问题转化为: $3n$ 阶图 G 满足任 $n+1$ 个点间至少有一条边, 证明: 图 G 中至少有 $3n$ 条边.

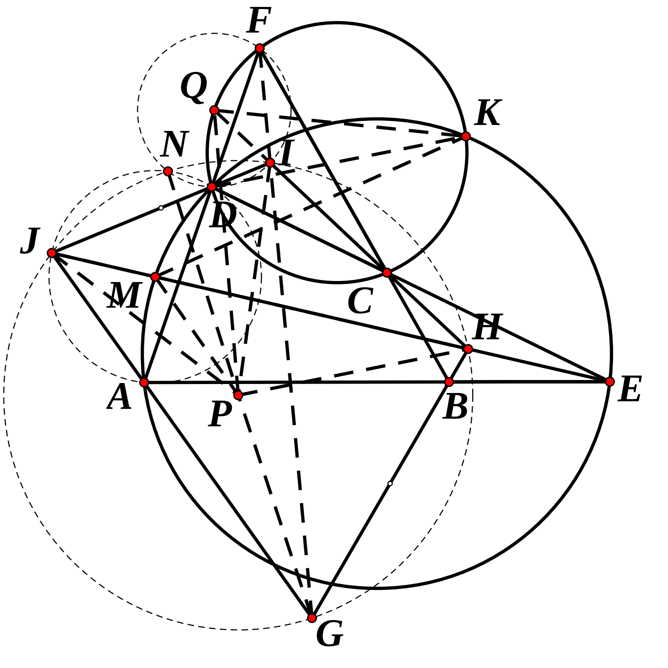
取图 G 的最大独立点集 T_1 (T_1 中的点两两不相邻), 余下的点集记为 T_2, 则由题设条件知, $|T_1|\le n$.

由 $|T_1|$ 的最大性知, $\forall A\in T_2$, 存在 $B\in T_1$ 使得 A,B 相邻. 故 T_1 中的点与 T_2 中的点之间至少有 $3n-n=2n$ 条边.

取图 G 限制在 T_2 上的导出子图中的最大的独立点集 T_3 ($T_3 \subset T_2$), 由题设条件知 $|T_3| \le n$. 故 $|T_2 \backslash T_3| \ge n$. 同理可知, T_3 中的点与 $T_2 \backslash T_3$ 中的点间至少有 n 条边, 故图 G 中至少有 $3n$ 条边. □

评注 此题是一道中等难度的题, 约 17% 的同学做对. 本题本质上是一个图论问题, 取最小值的构造很容易想到, 证明中使用极端原理取最大独立集得到下界估计. 另外, 不少同学发现此题是图论中 Turán 定理的一个特例: 将 $3n$ 个点中距离不为 1 的两点连边, 则原问题转化为求不含 K_{n+1} 的 $3n$ 阶图的边数的最大值.

题 6. 对边不平行的凸四边形 $ABCD$ 中, AB 延长线与 DC 延长线交于 E, AD 延长线与 BC 延长线交于 F. K 是 $\triangle CDF$ 的外接圆与 $\triangle ADE$ 的外接圆的交点 ($K \neq D$). 四边形 $ABCD$ 的四条外角平分线交成凸四边形 $GHIJ$ (如图). $\triangle CDF$ 的外接圆中, 弧 DF (不含 C) 的中点为 Q, 直线 EJ 与 $\triangle AED$ 的外接圆交于 M. 设 GH 的中垂线与 JI 的中垂线 (不重合) 交于 P, 证明: P, M, Q, K 共圆.



证明 由题设, HB, HC 分别是 $\angle ABC, \angle BCD$ 的外角平分线. 则有

$$
\begin{aligned}
\angle BHC &= 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB \\
&= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD\right) \\
&= \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BCD.
\end{aligned}
$$

同理, $\angle AJD=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle CDA$. 所以

$$\angle BHC+\angle AJD=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle CDA+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=180^\circ.$$

故 G,H,I,J 四点共圆. 注意到 P 是 GH 的中垂线与 JI 的中垂线的交点, 所以 P 是圆 $GHIJ$ 的圆心.

又 I 是 $\triangle CDF$ 的内心, G 是 $\triangle ABF$ 中点 A 所对的旁心. 故 I,G 都在 $\angle AFB$ 的内角平分线上, 则F,I,G 三点共线.

设 $\triangle ADJ$ 的外接圆与 $\triangle DFI$ 的外接圆相交于 $N(N\neq D)$, 则 N 是完全四边形 $GIFDJA$ 的密克点, 由密克点的几何性质知 N,J,G,I 四点共圆.

由鸡爪定理, Q 是 $\triangle DFI$ 的外心, M 是 $\triangle ADJ$ 的外心.

所以 JN 是 $\odot M$ 与 $\odot P$ 的公共弦, 这说明 P,M 都在 JN 的垂直平分线上. 则 $\angle MPN=\frac{1}{2}\angle JPN$. 同理 $\angle QPN=\frac{1}{2}\angle IPN$. 则

$$\begin{aligned}\angle MPQ&=\angle MPN+\angle QPN\\&=\frac{1}{2}\angle NPJ+\frac{1}{2}\angle NPI\\&=\frac{1}{2}\angle JPI=\angle JHI,\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\angle JHI&=\angle HCE+\angle HEC\\&=\angle QCD+\angle MED\\&=\angle QKD+\angle MKD=\angle MKQ,\end{aligned}$$

故 $\angle MPQ=\angle MKQ$. 所以 P,M,Q,K 四点共圆. □

评注 这是一道相当困难的几何题, 只有 7% 的同学做对. 此题的难点在于找出完全四边形 $GIFDJA$ 的密克点 N, 利用密克点的几何性质把 P,M,Q,K 联系在一起, 从而得出了结论.