

一道图论题的解答评注与剖析

冯跃峰

2015 年中国国家集训队测试第一轮第 6 题是一道非常简洁而有趣的图论题, 题目如下:

题目. 若干人举行乒乓球单打比赛, 任意两人至多比赛一次. 已知:

(1) 每个人胜了至少 a 个人, 也负于至少 b 个人 ($a \geq 1, b \geq 1$);

(2) 对任意两人 A, B , 均存在若干个人 $P_1, P_2, \dots, P_k$ ($k \geq 2, P_1 = A, P_k = B$), 使得 P_i 胜 P_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$).

试证: 存在 $a+b+1$ 个不同的人 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{a+b+1}$, 使得 Q_i 胜 Q_{i+1} ($1 \leq i \leq a+b$).

当年的集训队员高继扬给出了一个非常漂亮的解答, 在他的解答中, 条件 (2) 并不需要. 但这个解答写得比较简略, 读起来有点困难. 比如, 有些中间结论在整个解题中究竟起到什么作用? 特别是, 一些神来之笔又是如何想到的? 这些我们将在原解答中一一标出, 称之为“评注”; 此外, 我们将竭力还原原解答的想法, 揭示一气呵成的外表所隐藏着的复杂而自然的思维过程, 称之为“剖析”.

【原解答及评注】 将每个人作为一个顶点, 若 A 胜 B , 则在 A, B 之间连一条由 A 指向 B 的边, 用 $A \rightarrow B$ 表示, 得到一个有向图 G . 条件 (1) 说明 G 的每个顶点的出度 $\geq a$, 入度 $\geq b$. 我们要证明 G 中有长度为 $a+b$ 的有向路径.

设 $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots \rightarrow Q_t$ 是 G 中最长的有向链, 我们证明 $t \geq a+b+1$.

反证法. 假定 $t \leq a+b$, 由 t 的最大性, Q_t 战胜的人都在 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-2}$ 中, 战胜 Q_1 的人都在 $Q_3, Q_4, \dots, Q_t$ 中. 于是 $t-2 \geq a, t-2 \geq b$, 故 $a \geq 2, b \geq 2$.

评注 这里的“故”并不显然: 我们应究其所以然. 实际上, 按常规路线, 由 $t-2 \geq a$, 只能得到 $t \geq a+2$, 这与 $a \geq 2$ 相去甚远. 此外, $a \geq 2, b \geq 2$ 在解题中有何作用? 这也是我们需要弄清的.

收稿日期: 2018-4-29.

设 Q_t 战胜的人的下标集合为 $A = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, t-2\}$, 战胜 Q_1 的人的下标集合为 $B = \{y_1 < y_2 < \cdots < y_r\} \subseteq \{3, 4, \cdots, t\}$, 我们有 $k \geq a, r \geq b$.

若 $x_1 = 1$ (评注: 这个分类很突然, 为何仅仅 $x_1 = 1$ 要单独讨论?), 则 $y_t = t$.

由于至少有 $a+b$ 个人与 Q_t 比赛过, 因此存在一人 $Q \in \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_{t-1}\}$, Q 与 Q_t 比赛过. 由于 Q_t 战胜的人都在 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{t-2}$ 中, 故 $Q \rightarrow Q_t$, 此时存在更长的有向链 $Q \rightarrow Q_t \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{t-1}$, 与 t 的最大性矛盾.

假设 $x_1 > 1, y_t < t$, 此时必然有 $a, b \geq 3$.

评注 这里的“必然”颇令人费解, 但只要知道了前面的 $a, b \geq 2$ 的真正原因, 则这里的 $a, b \geq 3$ 也可类似处理. 同样, 我们还需弄清这个结论有什么作用.

设

$$A' = \{x-1 | x \in A, x \neq x_1, x_2\} \subseteq \{3, 4, \cdots, t-3\},$$

$$B' = \{y+1 | y \in B, y \neq y_{r-1}, y_r\} \subseteq \{4, 5, \cdots, t-2\}.$$

评注 这两个集合的引入“从天而降”, 犹如仙人指引一般. 怎么会想到去取这两个至关重要的集合呢?

于是

$$|A' \cup B'| \leq |\{3, 4, \cdots, t-2\}| = t-4 \leq a+b-4,$$

而 $|A'| = |A| - 2 \geq a-2, |B'| = |B| - 2 \geq b-2$.

若 $|A' \cup B'| < a+b-4$, 则 $A' \cap B'$ 非空. 设 $s \in A' \cap B'$ (评注: 此处的 s 在原解答中是 k , 但 k 在前面已有定义: $k = |A|$, 所以改成 s 以避免歧义), 于是 $s+1 \in A, s-1 \in B$. 考察与 Q_s 比赛过的 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 之外的另一人 Q , 若 $Q_s \rightarrow Q$, 则有更长的有向链 $Q_{y_{r+1}} \rightarrow Q_{y_{r+2}} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_t \rightarrow Q_{s+1} \rightarrow Q_{s+2} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{y_r} \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_s \rightarrow Q$ (评注: 该链要真正存在, 还必须 $y_r+1 \leq t, s+1 \leq y_r$, 尽管这不难证明, 但验证这一点无疑是十分必要的).

若 $Q \rightarrow Q_s$, 则有更长的有向链 $Q \rightarrow Q_s \rightarrow Q_{s+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_t \rightarrow Q_{x_1} \rightarrow Q_{x_1+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{s-1} \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{x_1-1}$ (评注: 该链要真正存在, 还必须 $s+1 \leq t, x_1 \leq s-1$, 这同样需要验证).

若 $|A' \cup B'| = a+b-4$, 则 $t = a+b$, 且 $A' \cup B' = \{3, 4, \cdots, t-2\}$. 因此 $3 \in A', t-2 \in B'$, 即 $2 \in A, t-1 \in B$. 考察与 Q_t 比赛过的不在 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 中的人 Q , 只可能 $Q \rightarrow Q_t$ (评注: 此处的“只可能”, 若点一下理由则更妥当,

它并不费多少笔墨：是因 $A \subseteq \{1, 2, \dots, t-2\}$ 而已），这样有更长的有向链 $Q \rightarrow Q_t \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{t-1} \rightarrow Q_1$ ，

综上所述， $t \geq a + b + 1$ ，结论获证。□

下面我们来探索上述解题的思维过程，以此解答前面所提的疑惑。

【题感】 本题的图论色彩很明显，从目标看，只需找到特定长的有向链。最容易想到的策略是取最长链，从反面证明它合乎要求：通过局部扩展，由已知的链扩充为更长的链导出矛盾。

【考察极端】 取一条最长有向链 $(Q_1, Q_2, \dots, Q_t)$ ，下面证明 $t \geq a + b + 1$ 。

【反面思考】 假定 $t \leq a + b$ ，我们期望将链向两侧扩展，自然想到考察战胜 Q_1 的点及被 Q_t 战胜的点。

【局部扩展】 设 Q_1 的左邻点（战胜 Q_1 的点）的集合为 A ， Q_t 的右邻点（被 Q_t 战胜的点）的集合为 B 。

显然，只需将 A 或 B 中的一个点接在上述链上，则可得到更长的链。但其中可能有相同的点，由此想到找充分条件，使其没有相同的点。

【充分条件分类】 如果 A 中有点 U 不属于 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$ ，或者 B 中有点 V 不属于 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-2}\}$ ，则将 U 或 V 接在前面的链上，得到更长的没有重复点的链，矛盾。

【解决遗留】 下设 $A \subseteq \{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$ ，且 $B \subseteq \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-2}\}$ 。

【圈分析】 为了得到更长的链，想象一种特殊情形： $(Q_1, Q_2, \dots, Q_t)$ 是一个有向圈，其中 $Q_t \rightarrow Q_1$ 。此时，很容易得到更长链，因为可以断开任意一条边，在一侧插入新的点即可。又以此条件为标准进行分类。

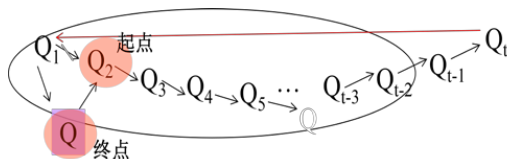


图 1

【充分条件分类】 若 $Q_t \rightarrow Q_1$ (图 1)，可取含有边 $Q_t Q_1$ 的更长链。

想象断开边 $Q_1 Q_2$ 或 $Q_{t-1} Q_t$ 。由对称性，不妨断开边 $Q_1 Q_2$ (原解答是断开边 $Q_{t-1} Q_t$)，这就只需有新的点 Q ，使 $Q \rightarrow Q_2$ 或者 $Q_1 \rightarrow Q$ 。这显然应该是后者，因为我们知道的是关于 Q_1 的性质： Q_1 的左邻点都在 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$ 中。

由于 Q_1 的出度入度之和至少为 $a + b \geq t$ ，所以在 $Q_2, Q_3, \dots, Q_t$ 外至少有一个点 Q 与 Q_1 比赛过，又 Q_1 的左邻点都在 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$ 中，所以 Q 只能是 Q_1 的右邻点。于是， $Q_1 \rightarrow Q$ ，得到更长链 $(Q_2, Q_3, \dots, Q_t, Q_1, Q)$ ，矛盾。

【解决遗留】若 $Q_1 \rightarrow Q_t$, 或两者之间未比赛, 此时 $A \subseteq \{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-1}\}$, $B \subseteq \{Q_2, Q_3, \dots, Q_{t-2}\}$.

【具体化】不妨设 $A = \{Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_k}\}$, $B = \{Q_{j_1}, Q_{j_2}, \dots, Q_{j_r}\}$, 其中 $3 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t-1$, $2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq t-2$.

能否仿上插入新的点 Q 得到更长链? 显然, Q 不再在 Q_1, Q_2 之间或 Q_{t-1}, Q_t 之间, 不妨设 Q 在 Q_s, Q_{s+1} 之间 ($2 \leq s \leq t-2$), 期望更长链为 $(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q, Q_{s+1}, Q_{s+2}, \dots, Q_t)$.

这就要求 Q 同时与两侧衔接: $Q_s \rightarrow Q$, $Q \rightarrow Q_{s+1}$. 其中满足 $Q_s \rightarrow Q$ 按上述方法同样可以找到, 但这样的 Q 还要同时满足 $Q \rightarrow Q_{s+1}$ 就很困难. 所以, 要找另外的拼接方式获取更长的链.

【圈分析】我们立足于在图中找到另外形式的圈: 取 Q_t 的右邻点集合 B 中一点 Q_{j_q} , Q_1 的左邻点集合 A 中一点 Q_{i_p} , 使 Q_{j_q} 到 Q_{i_p} 有一条有向路, 则形成一个圈. 然后将某条边 $Q_s Q_{s+1}$ 断开, 在一侧插入新的点 Q , 可找到更长链.

这里边 $Q_s Q_{s+1}$ 要满足怎样的条件暂时还不知道, 先任取一点 Q_s (以后优化), 然后找一个“新点”与 Q_s 相邻, 这按上述方法寻找即可: 因为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 中至多有 $t-1 \leq a+b-1$ 与 Q_s 比赛过 (Q_s 与 Q_s 不比赛), 一定有 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 外的一个点 Q 与 Q_s 比赛过.

但 Q 与 Q_s 比赛的胜负有两种情形, 需要分类讨论.

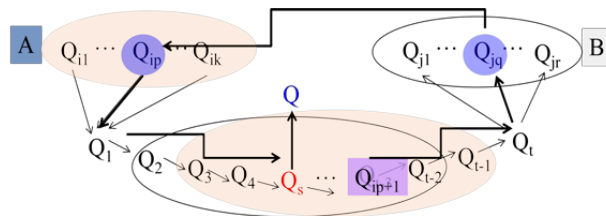


图 2

(1) 先考虑 $Q_s \rightarrow Q$ 的情形 (图 2), 自然取下标连续链: $(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q)$, 然后扩充.

【局部扩展】如前述, Q 的右侧不能扩充, 只能在 Q_1 的左侧扩充: 在 A 中取一点 Q_{i_p} , 使 B 中某点 Q_{j_q} 到 Q_{i_p} 存在连续有向路. 这样, 其链便扩充为 $(Q_{j_q}, Q_{j_q+1}, \dots, Q_{i_p}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q)$.

最后将链 $Q_{i_p+1}, Q_{i_p+2}, \dots, Q_t$ 接到左边, 得到新链

$$(Q_{i_p+1}, Q_{i_p+2}, \dots, Q_t, Q_{j_q}, Q_{j_q+1}, \dots, Q_{i_p}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q). \quad (*)$$

【优化假设】现在考虑如何找到这样的点 Q_s, Q_{i_p}, Q_{j_q} , 使得链 $(*)$ 包含原链的全部点, 且 Q_{j_q} 到 Q_{i_p} 有一条有向路 (原题增设了这样的条件).

对于前者, 只需 $j_q = s + 1$, 也就是说, $Q_{s+1} \in B$, 这就是 Q_s 要满足的关键条件. 此时, 相应的链为

$$(Q_{ip+1}, Q_{ip+2}, \dots, Q_t, Q_{s+1}, Q_{s+2}, \dots, Q_{ip}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q).$$

当然, 此时还要求 $Q_t \neq Q_{s+1}$ (即 $s \neq t - 1$), 因为 $Q_t \rightarrow Q_{s+1}$.

对于后者, 一个充分条件是 $s + 1 \leq i_p$ (保证存在下标连续的链), 这取下标 i_p 尽可能大的点即可, 比如取点 Q_{ik} , 此时链 (*) 变为

$$(Q_{ik+1}, Q_{ik+2}, \dots, Q_t, Q_{jq}, Q_{jq+1} \dots Q_{ik}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q).$$

其中 $s + 1 \leq i_p$ 变为 $s + 1 \leq i_k$, 即 $s \leq i_k - 1$. 这样, 我们得到点 Q_s 应满足的 3 个要求: $Q_{s+1} \in B, s \neq t - 1, s \leq i_k - 1$.

如何保证 $s \leq i_k - 1$? 我们需要 $|A| \geq 3$ (避免 $s = i_k, i_k - 1$), 而这是不难证明的. 注意可使用的条件虽然只有“出度至少为 a , 入度至少为 b ”, 但不要忘记还有两个“假设”. 第一假设: $t \leq a + b$; 第二假设: $A \subseteq \dots, B \subseteq \dots$.

【发掘性质】 依题意, $|A| \geq b, |B| \geq a$. 于是只需证明: $a \geq 3, b \geq 3$.

由第二假设, $t - 3 \geq |A| \geq b, t - 3 \geq |B| \geq a$.

再结合第一假设, $a + b - 3 \geq t - 3 \geq b, a + b - 3 \geq t - 3 \geq a$, 得 $a \geq 3, b \geq 3$. 容易证明, $a \geq 3$ 可保证 $s \leq i_k - 1$ (证明见后), 于是, 只要能找到合乎上述要求的点 Q_s , 则链 (*) 确实存在, 产生矛盾.

(2) 再考虑 $Q \rightarrow Q_s$ 的情形 (图 3), 可类似找到 Q_s 要满足的条件.

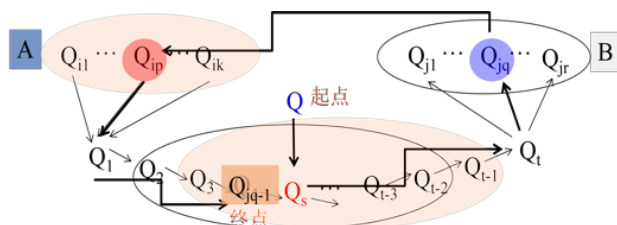


图 3

首先, 自然取连续链: $(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t)$, 然后扩充.

【局部扩展】 如前述, 左侧不能扩充, 只能在 Q_t 的右侧扩充: 在 B 中适当取一点 Q_{jq} , 使 Q_{jq} 到 A 中点 Q_{ip} 存在有向路. 这样, 其链扩充为

$$(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{jq}, Q_{jq+1}, \dots, Q_{ip}).$$

最后将链 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{jq-1}$ 接到右边, 得到链

$$(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{jq}, Q_{jq+1}, \dots, Q_{ip}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{jq-1}). \quad (**)$$

【优化假设】 现在考虑如何找到这样的点 Q_{ip}, Q_{jq} , 使得 (**) 包含了

包含原链的全部点, 且 Q_{jq} 到 Q_{ip} 有一条有向路. 对于前者, 只需 $i_p = s - 1$, 也就是说, $Q_{s-1} \in A$. 这就是 Q_s 要满足的另一关键条件, 相应的链为 $(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{jq}, Q_{jq+1}, \dots, Q_{s-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{jq-1})$.

当然, 此时还要求 $Q_{s-1} \neq Q_1$ (即 $s \neq 2$), 因为 $Q_{s-1} \rightarrow Q_1$. 对于后者, 一个充分条件是 $j_q \leq s - 1$ (存在下标连续的链). 这取下标 j_q 尽可能小即可. 比如取点 Q_{j1} , 此时链 (*) 变为

$$(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{j1}, Q_{j1+1}, \dots, Q_{s-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{j1-1}).$$

这里的要求 $j_1 \leq s - 1$ ($s \geq j_1 + 1$), 由 $|B| \geq 3$ 保证.

由此可见, 要使两种情况都有更长链, Q_s 要同时满足 6 个要求: $Q_{s-1} \in A$, $Q_{s+1} \in B$, $s \neq 2$, $s \neq t - 1$, $s \leq i_k - 1$, $s \geq j_1 + 1$.

【等价转换】 下面来找这样的点 Q_s , 关键是如何理解和转换 $Q_{s-1} \in A$, $Q_{s+1} \in B$.

对于 $Q_{s-1} \in A$, 它告诉我们应如何选取 Q_s 呢? —— Q_s 的左邻点属于 A , 也就是说, Q_s 是 A 中某个点的右邻点. 由此想到对 A 中“每个”点取其右邻点, 在这些右邻点中找 Q_s . 为照顾到 $s \leq i_k - 1$, 有两个右邻点可能不合要求, 需去掉.

因为 $|A| \geq 3$, 在 A 中去掉下标最大的两个点, 对剩下的其它点 Q_{ip} ($1 \leq p \leq k - 2$, 以保证 $s < i_k - 1$) 都取其右邻点 Q_{ip+1} , 令

$$A' = \{Q_{i1+1}, Q_{i2+1}, \dots, Q_{i(k-2)+1}\},$$

则 $Q_{s-1} \in A$ 变为 $Q_s \in A'$ (转化为对 Q_s 本身的要求).

再考虑 $Q_{s+1} \in B$, 同样, 因为 $|B| \geq 3$, 在 B 中去掉下标最小的两个点, 对剩下的其它点 Q_{iq} ($3 \leq q \leq r$, 以保证 $s \geq j_1 + 1$) 都取其左邻点 Q_{iq-1} , 令 $B' = \{Q_{j3-1}, Q_{j4-1}, \dots, Q_{jr-1}\}$, 则 $Q_{s+1} \in B$ 变为 $Q_s \in B'$ (转化为对 Q_s 本身的要求).

于是, $Q_s \in A' \cap B'$. 但 $A' \cap B'$ 中有点吗? 用充分条件分类即可.

【充分条件分类】 如果 $A' \cap B' \neq \emptyset$, 取 $A' \cap B'$ 中的一个点 Q_s , 则 $Q_{s-1} \in A$, $Q_{s+1} \in B$.

此外, 我们还需要证明: $s \neq t - 1$, $s \neq 2$, $s \leq i_k - 1$, $s \geq j_1 + 1$. 这就要研究 $A' \cap B'$ 中点的性质.

【发掘性质】 易知, 对 A' 中任何一点 Q_a , 有 $i_1 + 1 \leq a \leq i_{k-2} + 1$ (定义 A' 时去掉了 A 中下标 i_{k-1}, i_k).

而由分类假设 $A \subseteq \{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$, 可知 $i_1 \geq 3$, 所以 $4 \leq i_1 + 1 \leq a \leq i_{k-2} + 1 \leq i_{k-2} + 1 = i_k - 1 \leq (t - 1) - 1 = t - 2$. 类似有, 对 B' 中任何一点

$$Q_b, 3 \leq j_1 + 2 \leq j_3 - 1 \leq b \leq j_r - 1 \leq (t-2) - 1 = t-3.$$

于是, 当取 $Q_s \in A' \cap B'$ 时, 有 $4 \leq s \leq i_k - 1 \leq t-2, 3 \leq j_1 + 2 \leq s \leq t-3$, 所以 $s \neq t-1, s \neq 2, s \leq i_k - 1, s \geq j_1 + 1$.

因为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 中至多有 $t-1 \leq a+b-1$ 与 Q_s 比赛过 (Q_s 与 Q_s 不比赛), 一定有 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 外的一个点 Q 与 Q_s 比赛过.

若 $Q_s \rightarrow Q$, 则有更长链

$$Q_{ik+1}, Q_{ik+2}, \dots, Q_t, Q_{s+1}, Q_{s+2}, \dots, Q_{ik}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q),$$

矛盾.

若 $Q \rightarrow Q_s$, 则有更长链

$$(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{j_1}, Q_{j_1+1}, \dots, Q_{s-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{j_1-1})$$

矛盾.

【解决遗留】 如果 $A' \cap B' = \emptyset$, ——我们希望证明这种情况不存在或者也能找到更长链.

$A' \cap B' = \emptyset$ 能告诉我们一些什么信息呢? 先从数量上进行分析.

前面已经得到, 对 A' 中任何一点 Q_a , 有 $4 \leq a \leq i_k - 1 \leq t-2$; 对 B' 中任何一点 Q_b , 有 $3 \leq j_1 + 2 \leq b \leq t-3$.

前面是用它得到了 $s \neq t-1, s \neq 2, s \leq i_k - 1, s \geq j_1 + 1$. 除此之外, 它还能告诉我们什么信息呢?

【发掘性质】 $A' \cup B'$ 包含于 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-2}\}$ 中, 所以 $|A' \cup B'| \leq t-4 \leq a+b-4$.

结合 $A' \cap B' = \emptyset$, 得 $|A'| + |B'| = |A' \cup B'| \leq a+b-4$.

但 $|A'| = |A| - 2 \geq a-2, |B'| = |B| - 2 \geq b-2, |A'| + |B'| \geq a-2+b-2 = a+b-4$. 所以上述不等式都成立等号. 所以, $A' = \{Q_4, Q_5, \dots, Q_{t-2}\}, B' = \{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-3}\}$.

由 $Q_{t-2} \in A'$, 可知 $Q_{t-1} \in A$, 即 $Q_{t-1} \rightarrow Q_1$; 由 $Q_3 \in B'$, 可知 $Q_2 \in B$, 即 $Q_t \rightarrow Q_2$. 于是原链可更换为: $(Q_t, Q_2, Q_3, \dots, Q_{t-1}, Q_1)$ (图 4).

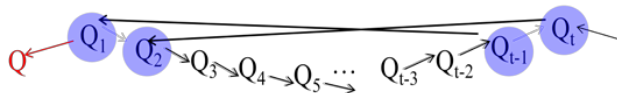


图 4

现在只需在 Q_t 处添加左邻点, 或在 Q_1 处添加右邻点即可.

【局部扩展】 考察 Q_1 的至少 $a+b$ 个邻点, 其中至少有一个 Q 不属于

$\{Q_1, Q_2, \dots, Q_t\} (t \leq a + b)$.

如果 $Q \rightarrow Q_1$, 则在原链左侧添加点 Q , 得到更长链 $(Q, Q_1, Q_2, \dots, Q_t)$;

如果 $Q_1 \rightarrow Q$, 则在更换的新链右侧添加点 Q , 得到更长链

$$(Q_t, Q_2, Q_3, \dots, Q_{t-1}, Q_1, Q).$$

【新写】取一条最长有向链 $(Q_1, Q_2, \dots, Q_t)$, 下面证明 $t \geq a + b + 1$.

假定 $t \leq a + b$, 设 Q_1 的左邻点的集合为 $A = \{Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}\}$, Q_t 的右邻点的集合为 $B = \{Q_{j1}, Q_{j2}, \dots, Q_{jr}\}$.

由 t 的最大性, $A \subseteq \{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}, B \subseteq \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-2}\}$.

不妨设

$$A = \{Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}\} (3 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t, k \geq b),$$

$$B = \{Q_{j1}, Q_{j2}, \dots, Q_{jr}\} (1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq t - 2, r \geq a).$$

若 $Q_t \rightarrow Q_1$, 由于 Q_1 的出度入度之和至少为 $a + b \geq t$, 所以在 $Q_2, Q_3, \dots, Q_t$ 外至少有一个点 Q 与 Q_1 比赛过, 又 Q_1 的左邻点都在 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_t\}$ 中, 所以 Q 只能是 $Q_1 \rightarrow Q$, 得到更长链 $(Q_2, Q_3, \dots, Q_t, Q_1, Q)$, 矛盾.

下设 $A \subseteq \{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-1}\}, B \subseteq \{Q_2, Q_3, \dots, Q_{t-2}\}$. 因为 $|A|, |B| \geq 3$, 令 $A' = \{Q_{i1+1}, Q_{i2+1}, \dots, Q_{i(k-2)+1}\}, B' = \{Q_{j3-1}, Q_{j4-1}, \dots, Q_{jr-1}\}$.

对 A' 中任何一点 Q_a , 有 $4 \leq i_1 + 1 \leq a \leq i_k - 2 + 1 \leq i_{k-2} + 1 \leq i_k - 1 \leq t - 2$.

对 B' 中任何一点 Q_b , 有 $3 \leq j_1 + 2 \leq j_3 - 1 \leq b \leq j_r - 1 \leq t - 3$.

可知 $A' \cup B'$ 包含于 $\{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-2}\}$, 所以 $|A' \cup B'| \leq t - 4 \leq a + b - 4$.

如果 $A' \cap B' \neq \emptyset$, 取 $Q_s \in (A' \cap B')$, 则 $Q_{s-1} \in A, Q_{s+1} \in B$. 且 $4 \leq s \leq i_k - 1 \leq t - 2, 3 \leq j_1 + 2 \leq s \leq t - 3$, 所以 $s \neq t - 1, s \neq 2, s \leq i_k - 1, s \geq j_1 + 1$.

因为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 中至多有 $t - 1 \leq a + b - 1$ 与 Q_s 比赛过, 一定有 $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 外的一个点 Q 与 Q_s 比赛过.

若 $Q_s \rightarrow Q$, 则有更长链

$$(Q_{ik+1}, Q_{ik+2}, \dots, Q_t, Q_{s+1}, Q_{s+2}, \dots, Q_{ik}, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q),$$

矛盾.

若 $Q \rightarrow Q_s$, 则有更长链

$$(Q, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_t, Q_{j1}, Q_{j1+1}, \dots, Q_{s-1}, Q_1, Q_2, \dots, Q_{j1-1}),$$

矛盾.

如果 $A' \cap B' = \emptyset$, 则 $|A'| + |B'| = |A' \cup B'| \leq a + b - 4$.

但 $|A'| + |B'| \geq a - 2 + b - 2 = a + b - 4$. 所以上述不等式都成立等号,
 $A' = \{Q_4, Q_5, \dots, Q_{t-2}\}, B' = \{Q_3, Q_4, \dots, Q_{t-3}\}$, 得 $Q_{t-1} \rightarrow Q_1, Q_t \rightarrow Q_1$.

考察 Q_1 的至少 $a+b$ 个邻点, 至少有一个邻点 Q 不属于 $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_t\}$.
因为 $B \subseteq \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{t-2}\}$. 只能是 $Q_1 \rightarrow Q$, 得到更长的有向链

$$(Q_t, Q_2, Q_3, \dots, Q_{t-1}, Q_1, Q),$$

矛盾.

综上所述, 命题获证. □

从我们的分析可以看出, 原解答的前段中关于 $a \geq 2, b \geq 2$ 的论断似乎没有什么用处.