数学感悟几则

冷 岗 松

上海大学

2018 年 6 月 • 四川绵阳

祝贺熊斌教授荣获 Paul Erdös 奖

行之苟有恒,

久久自芬芳.

——摘自崔瑗《座右铭》

一. 深度思维的数学学习

1. 表层学习的特点
- 整天刷题;
- 轻阅读、轻听讲、轻讨论;
- 只追求数量和速度;
- 不注意总结提炼;
- 无视表述的准确与严谨.

2. 深度思维的数学学习

- 积极与从容兼备;
- 善于欣赏与选择;
- 努力洞悉重点、难点、关键点;
- 注重方法的总结、提炼;
- 善于联系与对比;
- 追求表述的简洁与精准;
- 拓广新视角.

3. 诱发深度思维的数学学习

1) 指导深度阅读;

2) 提供深度思维学习的问题范例;

3) 提倡多写解题评注;

4) 组织有效的讨论;

5) 鼓励提出新问题.

4. 实例

题 1 (Alzer, 1992)

设 $n \geq 2$ 是给定的正整数. 求最大的 $\lambda = \lambda(n)$ 使得

$$\lambda \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left| x_{k+1} - x_k \right|^2$$

对任何满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ 的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均成立, 其中 $x_{n+1} = x_1$.

(2018, 新星春季试题)

难度分析:

1) 仅 5% 的学生做对此题;

2) 失败原因:

$$\text{常用三种方法失效}\begin{cases}\text{特例探索无助 }(n=3,4\text{ 的情况难度不低});\\ \text{调整没有目标 (很难猜出等号成立的条件)};\\ \text{归纳法无法探出 }\lambda\text{ 的最大值.}\end{cases}$$

相关问题:

题 1 实际是下面问题的周期版本.

题 2

实数 $a_1, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + \cdots + a_n = 0$. 证明:

$$\max_{1\le k\le n} |a_k|^2 \le \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})^2.$$

(2006, CMO)

一个令人诧异的事实:

诸多熟悉题 2 的学生叹息没有能做出题 1.

探究原因:

1) 先看题 2 的标准答案:

只需对任意 $1 \le k \le n$, 证明不等式成立即可.

记 $d_k = a_k - a_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, 则

$$a_1 = a_k + d_{k-1} + \cdots + d_1$$

$$\ldots$$

$$a_{k-1} = a_k + d_{k-1}$$

$$a_k = a_k$$

$$a_{k+1} = a_k - d_k$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_k - d_k - d_{k+1} - \cdots - d_{n-1}.$$

将上面 n 个等式相加并利用 $a_1+\cdots+a_n=0$ 可得

$$na_k=(n-k)d_k+(n-k-1)d_{k+1}+\cdots+d_{n-1}-$$

$$(k-1)d_{k-1}-(k-2)d_{k-2}-\cdots-d_1.$$

由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}(na_k)^2 &\le \left(\sum_{i=1}^{k-1} i^2+\sum_{i=1}^{n-k} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right)\\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right)\\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \le \frac{n^3}{3}\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2\right),\end{aligned}$$

故 $a_k^2 \le \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2.$ □

2) 表层学习无法导致“正迁移”：

仅满足读懂解法是典型的表层学习.

深度思维的学习或许需要:

- 方法提炼: 差分表示;
- 探索等号成立的条件, 确定 λ 的最优值;

(a) 要等号成立, 必须 $k=1$ 或 $k=n$.

(b) $k=n$ 时, 通过解方程得到等号成立的条件是:

$$a_k=-\frac{n^2-1}{6}\lambda+\frac{k(k-1)}{2}\lambda,\ k=1,\cdots,n,$$

其中 λ 为实常数.

$k=1$ 的情况类似.

- 再提炼凝缩:

等号成立的充要条件是差分成单调的等差数列.

题 1 的探索:

1) 周期条件带来的变化

(a) 差分和为零, 即

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=0.$$

(b) 问题关于 $a_1,\cdots,a_n$ 是轮换对称的. 因此不妨设

$$\max_{1\le k\le n}|x_k|^2=x_1^2=x_{n+1}^2.$$

2) 从高兴到失落 (模仿题 2 方法):

注意到差分表示

$$nx_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} i(x_{i+1} - x_i).$$

这样由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}
\max_{1\le k\le n} |x_k|^2 = x_{n+1}^2 &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i(x_{i+1} - x_i)\right)^2 \\
&\le \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} i^2\Big)\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2,
\end{aligned}$$

似乎成功了 (高兴)!

仔细核对后发现等号并不能成立, 因此右边的系数应当不是最优的 (失落).

3) 思维调节

- 肯定上面做法的基本模式.
- 缺陷是没有运用周期条件.
- 由周期性, 对任意实数 c 均有

$$nx_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}(i+c)\cdot(x_{i+1}-x_i).$$

再由 Cauchy 不等式等号成立条件可探索出 $c=-\frac{n+1}{2}$. 这样, 解出当 $\{a_i\}$ 的差分成等差数列时, 对应的不等式具有最优常数, 其最优的 λ 的值为 $\frac{12n}{n^2-1}$.

二. 通法与妙解

1. 通法的特点:

可能是一类问题合理的处理模式; 逻辑上自然; 视角大众化.

2. 追求通法, 欣赏妙解.

这是熊斌教授的观点, 这应是竞赛教学的一条原则.

3. 研究妙解的合理性和特殊性.

妙解不是通法常常是因为它抓住了具体问题中的个体特点.

4. 通过合情推理分析, 淡化技巧.

5. 实例

题 3 (AMM)

证明: 如果 $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < y_1 < \cdots < y_n$ 都是整数, 且 $x_1 + \cdots + x_k \geq y_1 + \cdots + y_n$, 那么

$$\prod_{i=1}^{k} x_i > \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

证 1 (梗概)**:** 对 $k+n$ 用归纳法.

当 $k+n=3$ 时, 易证 (略).

假设结论对 $k+n-1$ 成立.

先讨论平凡情况: $k=3$ 且 $n=1$ (略). 不妨设 $k\geq 3$, $n\geq 2$.

分四种情况讨论:

(1) 若 $x_1+x_k<y_1$, 则对

$$x_2<x_3<\cdots<x_{k-1}<x_1+x_k<y_1<\cdots<y_n,$$

用归纳假设可得

$$\left(\prod_{i=2}^{k-1}x_i\right)(x_1+x_k)>\prod_{i=1}^{n}y_i.$$

又注意到 $x_1x_k\geq x_1+x_k$, 故 $\prod_{i=1}^{k}x_i>\prod_{i=1}^{n}y_i$.

(2) 若 $x_1+x_k=y_1$, 类似 (1) (略).

(3) 若 $x_1+x_k=y_1+1$, 则对

$$x_2<x_3<\cdots<x_{k-2}<x_{k-1}+1<y_2<\cdots<y_n,$$

用归纳假设可得

$$\left(\prod_{i=2}^{k-2}x_i\right)(x_{k-1}+1)>\prod_{i=2}^{n}y_i,$$

又注意到 $x_1x_k\geq 2(x_1+x_k-2)=2(y_1-1)$，因此

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}x_i&>\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)\cdot 2\cdot\frac{y_1-1}{y_1}\cdot\frac{x_{k-1}}{x_{k-1}+1}\\&>\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}>\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right).\end{aligned}$$

(4) 若 $x_1+x_k \geq y_1+2$, 则对

$$1 < x_1+x_k-y_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < y_2 < \cdots < y_n,$$

用归纳假设可得

$$(x_1+x_k-y_1)\left(\prod_{i=2}^{k-1} x_i\right) > \prod_{i=2}^{n} y_i,$$

再结合 $x_1x_k > (x_1+x_k-y_1)y_1$, 便得 $\prod_{i=1}^{k} x_i > \prod_{i=1}^{n} y_i$.

综上, 结论对 $k+n$ 成立. $\square$

证 2: 显然 $k \geq 2$, $y_1 \geq 4$.

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则要证结果等价于

$$\sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i) > \sum_{i=1}^{n} y_i f(y_i). \qquad ①$$

由条件知要证 ①, 只需证

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) \geq \max_{1\leq i\leq n} f(y_i). \qquad ②$$

事实上, 由 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 知 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e}, +\infty)$ 上是减函数, 因此

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_k)\},$$

$$\max_{1\leq i\leq n} f(y_i) = f(y_1).$$

下分两种情况:

1) 当 $x_1 \geq 3$ 时, $f(y_1) < f(x_k) < f(x_1)$, ② 显然成立.

2) 当 $x_1 = 2$ 时, $f(x_1) = f(2) = f(4) \geq f(y_1)$, ② 成立.

故 ② 得证. $\square$

评注:

(1) 此题应是 CMO 水平中的较难的题;

(2) 解 1 是通法;

理由:

- 这是一个离散极值 (整变元) 问题, 用归纳法处理是常用方法;
- 对 $k + m$ 用归纳法是自然模式 (对两组数的总数用归纳, 调整空间大).
- 用 $x_1 + x_k$ 替代 x_1, x_k 的想法合理, 且分类 (讨论) 自然.

(3) 解 2 是妙解;

- 简短精巧;
- 大胆采用实变元的处理手法;
- 值得欣赏, 但这是个别问题的特法 (通常的整变元问题是不能转为实变元处理的).

(4) 两点注意:

- 解 1 的第 (3) 中情况易犯错误: 对 $x_2 < x_3 < \cdots < x_{k-1} < y_2 < \cdots < y_n$ 用归纳假设 (这时不满足运用归纳假设的条件).
- 由解 2 可看出, 条件 " $1 < x_1 < \cdots < x_k < y_1 < \cdots < y_n$ 是整数" 可用条件 "$e \leq x_1 < \cdots < x_k < y_1 < \cdots < y_n$" 来代替, 结论仍成立.

题 4

设 z_1, z_2, z_3, z_4 是 4 个模为 1 的复数, 且满足 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

证明: z_1, z_2, z_3, z_4 中必有两个的和为零.

(2011, Rom Dis.; 2017, 新星)

先看三个有趣的证法

证 1 : 由 $|z_1+z_2+z_3|=|-z_4|=1$ 知, $\triangle z_1z_2z_3$ 的垂心在外接圆上, 因此 $\triangle z_1z_2z_3$ 为直角三角形, 从而结论成立. □

证 2: 由 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ 知, $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}, \overrightarrow{OZ_3}, \overrightarrow{OZ_4}$ 通过平移首尾相接可构成四边形, 再由条件 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ 知, 这个四边形是菱形, 从而结论成立. □

证 3: 由

$$
\begin{aligned}
& (z_1+z_2)(z_1+z_3)(z_1+z_4) \\
= & z_1^3+z_1^2(z_2+z_3+z_4)+z_1(z_2z_3+z_3z_4+z_2z_4)+z_2z_3z_4 \\
= & z_1^2(z_1+z_2+z_3+z_4)+z_1z_2z_3z_4(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_4})=0.
\end{aligned}
$$

从而 $z_1+z_2, z_1+z_3, z_1+z_4$ 中必有一项为 0. □

- 我们把和为零的 n 个复数, 叫做一个 n 元规范组;
- 题 4 说明单位圆上的任何 4 元规范组, 一定存在两个对径元.

思考 1: 单位圆上的 n 元规范组一定有对径元吗?

当 $n > 4$ 时, 我们可以构造没有两个对径元的 n 元规范组. 这就产生了下面的

题 5

求最大的正整数 $n\ (n \geq 3)$ 使得单位圆上的任意满足 $\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$ 的复数 $z_1, \cdots, z_n$ 中存在 $z_i, z_j\ (1 \leq i < j \leq n)$ 使得 $z_i + z_j = 0$.

答案: n 的最大值是 4.

思考 2: **一般中心对称的平面曲线上的规范四点组一定有对径元吗?**

首先考察 p 圆 $A_p = \{(x, y) \mid |x|^p + |y|^p = 1\}$, 特别地, $p = 2$ 即为通常的单位圆; $p = +\infty$ 为正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

- 正方形上的规范四点组不一定有对径点.
- 一般 p 圆 A_p 有反例吗? 构造不出.
- 对比单位圆和正方形的差异: 前者严格凸, 后者非严格凸.
- 抛开 p 圆, 直接考虑一般的严格凸的封闭的对称曲线 (正面探索).

最终产生了

定理 1 (Leng-Wu-Xi)

设 K 是一个关于原点中心对称的严格凸的平面封闭曲线，$z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$ 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$，则存在 z_i, z_j $(1 \leq i < j \leq 4)$ 使得 $z_i + z_j = 0$.

一个有趣的推论:

推论

设 K 是一个关于原点中心对称的严格凸的平面封闭曲线，$z_1, z_2, z_3, z_4 \in K$ 满足 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$，则对任意正整数 n，我们总能适当选取 $+, -$ 号，使得

$$z_1^n \pm z_2^n \pm z_3^n \pm z_4^n = 0.$$

对于单位圆, 这是一个中等难度的问题:

题 6

设 $x, y, z, t \in R$ 满足

$$\cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0,$$

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0.$$

证明: 对于任意 $k \in N^*$, 总可适当选取 $+$ 或 $-$, 使得

$$\sin kx \pm \sin ky \pm \sin kz \pm \sin kt = 0.$$

四. 一个代数不等式的最优常数

V. Cîrtoaje 在《Algebraic Inequalities》一书中证明了如下优美的不等式:

题 7

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且满足 $a_1 + \cdots + a_n = n$. 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

这是一个难度很大的不等式.

观察: 尽管 $a_1 = \cdots = a_n$ 时, 上述不等式可取等号, 但此时左、右两边为零, 不依赖于系数, 因此猜测右边的系数可能不是最优的.

提出问题:

- 对给定的 n, 能否确定右边系数 $\lambda(n)$ 的最佳表达式?
- 是否能确定一个与 n 无关的绝对正常数?

上面的问题 2 获得了令人兴奋的进展. 最近温州乐清寄宿中学的韩新淼同学得到了下面有趣的结果:

定理 2 (韩新淼, 2018)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$**, 且** $a_1 + \cdots + a_n = n$**. 则:**

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq (2\sqrt{2} - 1)(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

进一步, 上海中学的张盛桐同学改进了韩新淼同学的结果. 他证明了

定理 3 (张盛桐, 2018)

使得不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n \geq c(1-a_1a_2\cdots a_n)$$

对任意 $n \in N^*$ 及任意满足 $a_1+\cdots+a_n=n$ 的正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 成立的最大常数

$$c=\inf_{b>0}\frac{(b-1)^2}{b}\cdot\frac{1}{1-be^{1-b}}\approx 1.846.$$

五. 如何证明多项式根的模为 1

题 8

设实数 $\lambda \in (0,1)$, n 是正整数. 证明: 多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{k(n-k)} x^k$$

的每个根的模都为 1.

2018 年国家队选拔考试 (第二轮)

这是著名物理学家杨振宁—李政道上世纪 40 年代一文中结果的简化版本 (由姚一隽教授提供, 瞿振华教授修改而成).

1. 关于方法的问答 (花絮):

- 讨论此题时, 余红兵教授问: 如何证明多项式根的模为 1?
- 我的回答: 在无法求出根的表达式的情况下, 下面两种方法时常是有效的:

(1) 转化为证明它的逆否命题, 即假设 $|z| \neq 1$, 推出 $f(z) \neq 0$ (即 z 不是 $f(x)$ 的根), 这时通常要分 $|z| > 1$ 和 $|z| < 1$ 两种情况讨论;

(2) 将 $z = e^{i\theta}$ 代入多项式, 转而研究关于 θ 的方程的解的存在性和个数.

2. 实例

题 9

已知一个 n 次复系数多项式 $P(x)$ 的根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足 $|\alpha_i| = 1, i = 1, 2\cdots, n$, 多项式 $Q(x)$ 满足

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}.$$

证明: $Q(x)$ 的每个根的模都为 **1**.

(1995, IMC)

证明: 设 $|z| \neq 1$, 则

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\frac{Q(z)}{P(z)} &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\frac{z+\alpha_k}{z-\alpha_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{|z|^2-1}{|z-\alpha_k|^2} = \begin{cases} >0, & |z|>1 \\ <0, & |z|<1 \end{cases}
\end{aligned}$$

这说明 $|z| \neq 1$ 时, $\frac{Q(z)}{P(z)} \neq 0$, 从而 $Q(z) \neq 0$.

故 $Q(z)$ 的所有根的模为 1. □

题 10

设多项式 $P(z) = z^{2n} + az^{2n-1} + \cdots + az + 1$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 证明: 多项式 $P(z)$ 在上半单位圆上至少有 $n-1$ 个复根.

证明: (梗概) 设 z 是 $P(z)$ 的根, 则由 $P(z) = 0$ 可得

$$-a = \frac{(z^{2n} + 1)(z - 1)}{z^{2n} - z}.$$

记 $z = w^2, w = \mathrm{e}^{i\theta}$, 则上式可写为

$$-a = \frac{\sin(2n + 1)\theta}{\sin(2n - 1)\theta} - 1.$$

这样只需证明:

对任意实数 a, 关于 θ 的方程

$$f(\theta) \triangleq \sin(2n+1)\theta + (a-1)\sin(2n-1)\theta = 0$$

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上至少有 $n-1$ 个解.

- 若 $a=1$, 则当 $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}, k=1,2,\cdots,n$, 有 $f(\theta_k)=0$, 结论成立.
- 若 $a \neq 1$, 对于 $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, 可证明

$$f(\theta_k)f(\theta_{k+1}) < 0.$$

因此 $f(\theta)$ 在 (θ_k, θ_{k+1}) 上至少存在一个解, 故 $f(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上至少有 $n-1$ 个解.

谢　谢！