2017 年第 83 届圣彼得堡数学竞赛组合题解析

吴尉迟　冷岗松
(上海大学数学系, 200444)

在国家和地区的数学竞赛中, 圣彼得堡的数学竞赛可能是公认难度最大的, 特别是其中的组合题, 题面新颖, 富有挑战性. 我们从 2017 年的圣彼得堡数学竞赛中选了五个组合题, 其中第 1 题是九年级竞赛题, 第 2 题是十年级竞赛题, 第 3、4、5 题是十一年级竞赛题. 对这五个题, 我们组织一些老师和学生参与讨论, 参与讨论的学生有: 温州中学欧阳泽轩, 雅礼中学陈伊一, 乐清市乐成寄宿中学叶奇、谢柏庭、韩新淼; 参与讨论的老师有: 羊明亮老师、付云皓老师、罗振华老师、彭熹老师. 特别感谢羊明亮老师组织其学生参与讨论并整理了解答, 付云皓老师仔细审阅了第二题的证明.

在所选的五个题中, 第 3 题是联赛二试难度的题；第 1、4 题是冬令营中等难度的题; 第 5 题是冬令营水平中的难题; 第 2 题是难度很大的题, 在我们讨论过程中, 产生了几个伪证, 其中也有“巧妙”的伪证. 我们选取了其中部分解答, 供有兴趣的读者参考.

第 1 题 将坐标平面的第一象限分成若干个边长为 1 的方格, 其中有 n^2 个方格被染色. 证明: 存在 n^2+n 个方格 (可以包括被染色的方格), 使得其中每个方格均与至少一个已染色的方格形相邻.

证明 1 (叶奇) 将所有方格分为无数条从左上到右下的斜线.

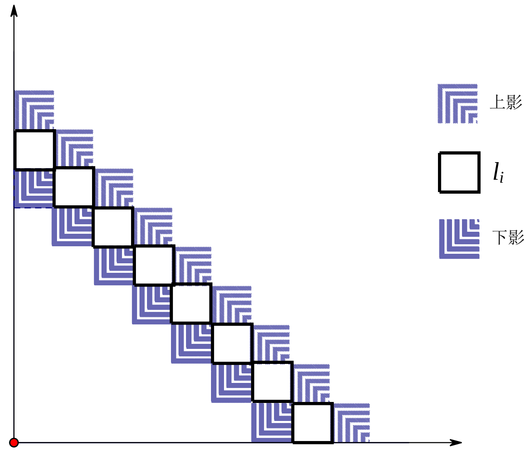
设 n^2 个方格出现在共 t 条斜线中. 将这些斜线从下往上一次记为 $l_1, l_2, \cdots, l_t$, 设 l_i 中有 n^2 个已染色方格中的 a_i 个, 则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_t=n^2.$$

现考虑 l_i 上的 a_i 个已染色的方格. 除去最左的方格外, 取其余 a_i-1 格的左相邻格, 称这 a_i-1 个格为 l_i 的**下影**; 再取这 a_i 个已染色的方格的右相邻格, 及

收稿日期: 2018-05-28.

最左格的上相邻格, 这 a_i+1 个格称为 l_i 的**上影**. 显然, 这 $(a_1-1)+(a_i+1)$ 格均与已染色方格相邻.



对于给定的 $1 \le i \le t$. 取 $l_1, l_2, \cdots, l_i$ 的下影, 及 $l_i, l_{i+1}, \cdots, l_t$ 的上影, 显然这些格两两不同且均与已染色方格相邻, 共有

$$\begin{aligned}&(a_1-1)+\cdots+(a_i-1)+(a_i+1)+\cdots+(a_t+1)\\=&(a_1+\cdots+a_t)+a_i-i+(t-i+1)\\=&n^2+a_i+t-2i+1\end{aligned}$$

个方格.

下证: 存在 i, 使得 $a_i+t-2i+1 \ge n$. $\quad (*)$

反证法. 若对任意 i, 均有 $a_i+t-2i+1<n$, 由整数的离散性知,

$$a_i+t-2i+2 \le n. \tag{1}$$

取 $i=1$, 有 $n \ge a_1+t-2+2 \ge 1+t$.

对 (1) 两边关于 $i=1,\cdots,t$ 求和得

$$n^2+t^2-t(t+1)+2t \le nt.$$

从而有 $t \ge \frac{n^2}{n-1} > n+1$. 这与 $n \ge t+1$ 矛盾.

故 $(*)$ 成立.

取满足 $(*)$ 的 i, 此时有 $n^2+a_i+t-2i+1 \ge n^2+n$ 个格与已染色方格相邻, 命题得证. □

证明 2 (欧阳泽轩) 我们证明更强的结论: 若有 n^2+x $(x \ge 0)$ 个方格被染色时, 则至少可选取 n^2+n+x 个方格满足条件.

先证一个引理:

引理 某行或某列有至少 n 个被染色的方格时, 则至少可选取 n^2+n+x 个

方格满足条件.

引理的证明 不妨设第 i 列有至少 n 个被染色的方格, 则这些方格的横坐标为 i.

考虑如下方格:

$$A=\{a\mid a\text{ 由横坐标大于等于 } i \text{ 的已染色的方格向右平移一格得到}\},$$

$$B=\{b\mid b\text{ 由横坐标小于等于 } i \text{ 的已染色的方格向上平移一格得到}\}.$$

易知 $A\cap B=\emptyset$, 且 A,B 均在第一象限内, 故 $|A\cup B|\geq n^2+n+x$, 引理得证.

回到原题. 对 n 归纳.

当 $n=1$ 时, 由引理知, 结论成立.

假设结论对 $n-1$ 成立. 考虑 n 时的情形.

采用反证法. 由引理, 可设横坐标为 1 的被染色的方格的数目小于等于 $n-1$ 个, 纵坐标为 1 的被染色的方格的数目小于等于 $n-1$ 个.

考虑射线

$$\begin{cases} x=1, y\geq 1 \\ x\geq 1, y=1 \end{cases}$$

与 x 轴, y 轴围出的区域 S, 第一象限剩余部分记为 T.

易知 S 中至多 $2n-2$ 个方格被染色, 故 T 中被染色的方格数不少于

$$n^2+x-(2n-2)>(n-1)^2$$

个.

对区域 T, 设其中有 $(n-1)^2+y$ 个方格被染色, 由归纳假设知, 至少有 $(n-1)^2+y+n-1$ 个方格满足条件.

又 S 中有 $n^2+x-(n-1)^2-y=2n-1+x-y$ 个方格被染色, 故 S 中至少有 $2n+x-y$ 个方格满足条件.

故第一象限中至少有 $(n-1)^2+y+(n-1)+2n+x-y=n^n+x$ 个方格满足条件. □

评注 本题的基本想法是考察已染色方格的相邻方格. 其中, 证 1 的思路是取已染色方格所在的斜线 $l_1,l_2,\cdots,l_t$, 考察 $l_1,l_2,\cdots,l_i$ 的下影, 及 $l_i,l_{i+1},\cdots,l_t$ 的上影, 利用反证法证明存在性.

证 2 采用了加强归纳的证明方法, 其关键的步骤是对区域 S 和 T 中的已染色的方格数目分别进行讨论, 进而利用归纳假设得到结论.

第 2 题 在某国中, 某些城市由单向的道路连通. 每个城市至少有两条通向其他的道路, 也至少有两条通向它的道路, 且从任一城市出发可以到达其他城市. 证明: 存在一条循环的道路, 使得除去这条循环道路后, 仍满足从任一城市出发可以到达其他城市.

证明 (谢柏庭) 先将原题用图论语言重新叙述:

在一个有向图中, 每个点的出度和入度均至少为 2, 且从任一点出发可到达其他任意点, 则存在一个有向圈, 使得去掉这个圈中的边后仍是连通图.

我们定义: 在有向图中, 一条由 A 出发到 B 的路径, 称为 A 到 B 的一条出路径, 或称为 B 到 A 的一条入路径. 若由 A 出发能到达 B, 则称 A 到 B 连通 (定义 A 到 A 连通); 若两个有向圈无公共边, 则称它们不交.

先证明一个引理:

引理 若图 G 中任一点的出度 (或任一点入度) 均不小于 1, 则图 G 中存在有向圈.

引理的证明 只需考虑出度不小于 1 的情形. 从图中一点 A_0 出发, 依次取 A_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 为 G 中一条边, 由条件知, 此操作可以无限进行下去, 又 G 中点的个数是有限的, 故存在 $i < j$, 使得 A_i 与 A_j 相同. 则

$$A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_j$$

为 G 中的一个有向圈, 引理证毕. □

对图 G, 由引理知, 存在有向圈 C_0. 去掉 C_0 中的所有边. 此时由题意知, G 中任一点 A 的出度和入度均大于等于 1. 故由引理, 存在有向圈 C_1, 且 C_0, C_1 不交.

采用反证法, 即 G 去掉任何一个有向圈的边所得的图均不是连通的, 从而图 G 去掉有向圈 C_1 的边后所得的图 G_1 不是连通的. 那么必存在 C_1 中一点 A_0, 其要么无到 C_0 上的点的出路径, 要么无到 C_0 上的点的入路径. 否则, 在去掉 C_1 所得的图 G_1 中, 任给 C_1 中两点 A, B, 可由

$$A \to C_0 \text{ 上某点 } A' \to C_0 \text{ 上某点 } B' \to B$$

的方式到达 B. 则去掉 C_1, G 的连通性不变, 满足要求, 这与反证假设矛盾!

不妨设 A_0 无到 C_0 上的点出路径. ①

设 $T_1 = \{P \mid \text{在图 } G_1 \text{ 中, } A_0 \text{ 到 } P \text{ 连通}\}$, V 为全体顶点集.

由图 G_1 中 $d_{\text{出}}(A_0) \geq 1$ 知, $T_1 \neq \emptyset$.

由 ① 知, 任给 $P\in T_1$, P 不在 C_0 中, 故 $V\backslash T_1\neq\emptyset$.

由 T_1 定义知, 任给 $P\in T_1$, P 无到 $V\backslash T_1$ 中点的出路径, 且在图 G_1 中 $d_{出}(P)\geq 1$. $(*)$

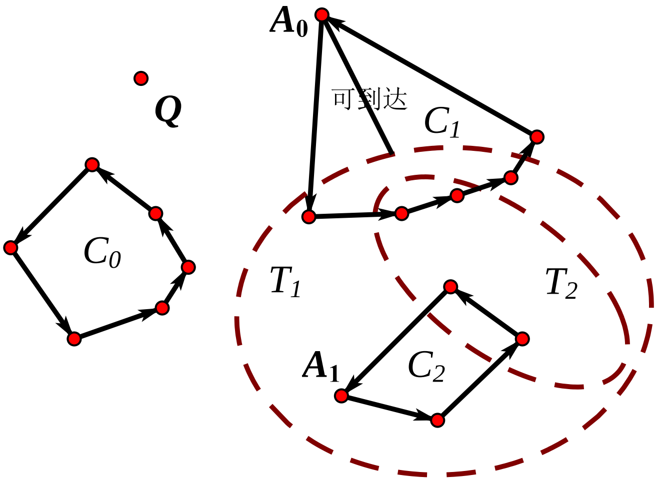
下面我们通过操作得到具有性质 $(*)$ (或与其对偶的, 与入路径相关的性质) 但比 T_1 中点数更少的点集 T_2. $(**)$

由 $(*)$ 及引理知, 在图 T_1 中点集及他们间的边构成的子图中, 存在有向圈 C_2. 则图 G 中, C_1, C_2, C_0 互不相交 (T_1 不包含 C_0 中点). 在图 G 中去掉 C_2 中的边得到 G_2.

对 C_2 中的点与 C_1 进行类似之前的讨论知: 存在 C_2 中的点 A_1, 有满足以下条件之一:

(I) 在 G_2 中无到 C_1 的点的出路径;

(II) 在 G_2 中无到 C_1 的点的入路径.



若为 (I), 构造 $T_2=\{P\mid$ 在图 G_2 中, A_1 到 P 连通$\}$. 由 $(*)$ 知, $T_2\subsetneq T_1$ (A_1 到 A_0 不连通). 同前面类似讨论知, T_2 满足 $(*)$.

若为 (II), 构造 $T_2=\{P\mid$ 在图 G_2 中, P 到 A_1 连通$\}$.

注意到: 图 G 中 A_0 到任一点 Q ($Q\in V\backslash T_1$) 均连通. 由 $(*)$ 知, A_0 到 Q 的出路径中无 T_1 两点间的边, 故在 G_2 中仍连通. 由 (II) 知, Q 到 A_1 不连通. 即任给 $Q\in V\backslash T_1$, Q 到 A_1 不连通, 从而 $Q\notin T_2$, 故 $T_2\subseteq T_1$.

同前讨论可知: $T_2\subsetneq T_1$ (A_0 到 A_1 不连通), 且任给 $P\in T_1\backslash T_2$, P 无到 T_2 中的点的出路径. 即有: 在图 G_2 中, 任给 $P\in V\backslash T_2$, P 到 T_2 中的点不连通 (即无到 T_2 中的点出路径) $(*')$

那么, 任给 $S\in T_2$, $d_{入}(S)\geq 1$ (G 中 $d_{入}(S)\geq 2$, 去掉 C_2 后, 至多减 1).

故 T_2 满足 $(*')$, 即 $(*)$ 的对偶性质.

所以对 (I), (II) 两种情形, 我们均实现了 $(**)$.

反复操作记得集合列 $T_1, T_2, T_3, \cdots$, 注意到 $|T_k|$ 严格递减, 故只能进行有限次操作. 故某步后, 所得的图 G_k 为连通图, 这与反证法假设矛盾! 故假设不成立, 原命题得证. □

评注 此题难题很大, 也容易产生伪证. 上面的解法用了类似于无穷递降法的想法: G 去掉一个有向圈 C_1 后, 考虑剩余的图 G_1 中点 A_0 "到达域" T_1, 在 T_1 关于 G_1 的导出子图中进行类似操作得到其真子集 T_2. 该操作会在有限步终止, 最后所得的图 G_k 便是连通图.

第 3 题 已知 X 是给定的集合, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 X 的子集且 $|A_i| = mk$ $(m, k \in \mathbb{N})$. 证明: 可以将 X 分划成 k 个集合, 使得每个集合与 A_i $(i = 1, \cdots, m)$ 相交非空.

证明 (韩新淼) 依次取

$$a_{1,1} \in A_1, a_{1,2} \in A_1, \cdots, a_{1,k} \in A_1, a_{2,1} \in A_2,$$
$$\cdots, a_{2,k} \in A_2, \cdots, a_{m,1} \in A_m, \cdots, a_{m,k} \in A_m,$$

且 $a_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k)$ 互不相同 (由 $|A_i| = mk$ 知这样的取法可行).

将 X 分划为 k 个集合 $B_1, \cdots, B_k$ 满足:

$$a_{i,j} \in B_j, \forall\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k,$$

且 $X \backslash \{a_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k\}$ 的元素任意分配到 $B_1, \cdots, B_k$ 中, 则此时对任意 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$, 有

$$a_{i,j} \in A_i \cap B_j,\ 即\ A_i \cap B_j \neq \emptyset.$$

故这种分划方式满足要求. □

评注 此题是一道容易题. 其想法是: 在每个 A_i $(i = 1, \cdots, m)$ 取 k 个元素 (取出的 mk 个元素两两不同) 分配到 k 个集合中. X 中其余元素可以任意分配.

第 4 题 在某个国家中, 一些数学家相互认识. 将他们任意分成两组, 均有 2 个相互认识的数学家且他们来自不同的组. 若四个或四个以上数学家坐在圆桌周围, 且任意两个相邻的数学家均相互认识, 则有两个相互认识的数学家不是相邻的. 记 c_i 表示由 i 个相互认识的数学家所构成的集合的数目. 证明:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots = 1.$$

证明 (叶奇) 首先转化为图论问题: 定义图 G, 用点表示数学家, 点相连当且仅当数学家相识, 则条件成为: G 是连通图, 且对 G 中任意长至少为 4 的圈, 存在圈上不相邻的两个点在 G 中有边相连. 则题中 c_i 为 G 中 i 阶完全子图的个数.

下面对 G 的顶点数 n 归纳证明结论成立.

当 $n=1,2$ 时, 结论显然.

假设结论对 $1,2,\cdots,n-1$ 成立, 考虑 n 时的情况 ($n\geq 3$).

任取 G 中一点 A. 取 G 中与 A 相连的所有点及这些点之间的边, 得到子图 G''. G 中去掉点 A 及与 A 相连的边, 得到子图 G'. 此时, G'',G' 的顶点数均不超过 $n-1$.

在 G' 中类似定义 $c_1',c_2',\cdots$, G'' 中类似定义 $c_1'',c_2'',\cdots$, 显然有 $c_1=c_1'+1$. 而对于 $i\geq 2$, c_i-c_i' 为 G 中含 A 的 i 阶完全子图的个数, 这等于 G'' 中 $i-1$ 阶完全子图个数, 即 c_{i-1}''. 故 $c_i=c_i'+c_{i-1}''$.

结合 $c_1=c_1'+1$ 知, 要证 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}c_i=1$, 只需证

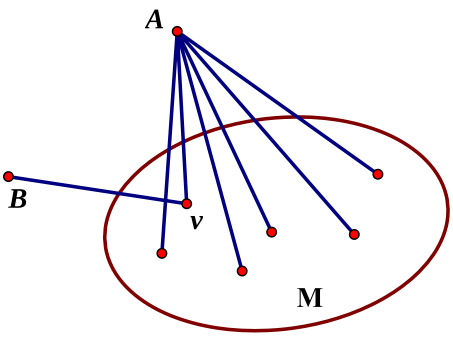
$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}c_i'=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}c_i''.$$

对 G',G'' 的各连通分支分别用归纳假设 (易知每个连通分支均满足题设要求), 得

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}c_i'=G' \text{ 中连通分支数, 记为 } l',$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}c_i''=G'' \text{ 中连通分支数, 记为 } l''.$$

下面仅需证 $l'=l''$. 记 $M=\{v\mid v \text{ 在 } G \text{ 中与 } A \text{ 相连}\}$.

由于 G 是连通的, 故对 G' 中任意点 $B\notin M$, B 与 M 中某点 v 之间有一条不经过点 A 的路, 从而 B 与 v 在 G' 中位于同一连通分支, 这说明 $l'\leq l''$.



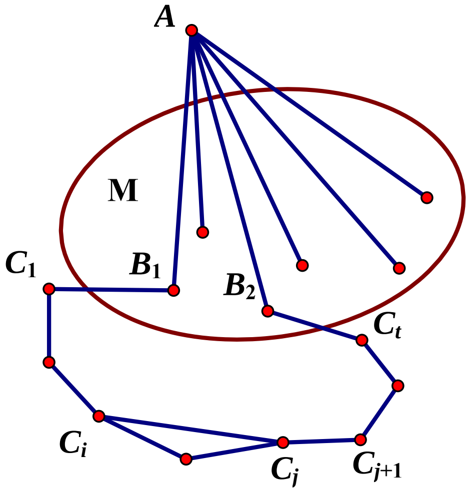
下证 $l'\geq l''$. 只需证: 在 G'' 中不位于同一连通分支的两点, 在 G' 中亦然.(*)

若不然, 则在 G 中存在一条路的两个端点在 M 中, 且在 G' 中位于不同连通分支. 取满足此条件的最短路, 记为 $B_1C_1C_2\cdots C_tB_2$, 其中 $B_1,B_2\in M$ 且在 G''

中位于不同连通分支.

若有某点 $C_i \in M$, 则 C_i 必不与 B_1 或 B_2 位于 G'' 的同一连通分支. 不妨设 B_1 与 C_i 不位于同一连通分支, 则 $B_1C_1C_2\cdots C_i$ 是一条更短路, 矛盾!

故 $C_1,\cdots,C_t \notin M$. 又由 B_1B_2 不相连知, $t \geq 1$. 故 $AB_1C_1C_2\cdots C_tB_2A$ 是 G 中长至少为 4 的圈.



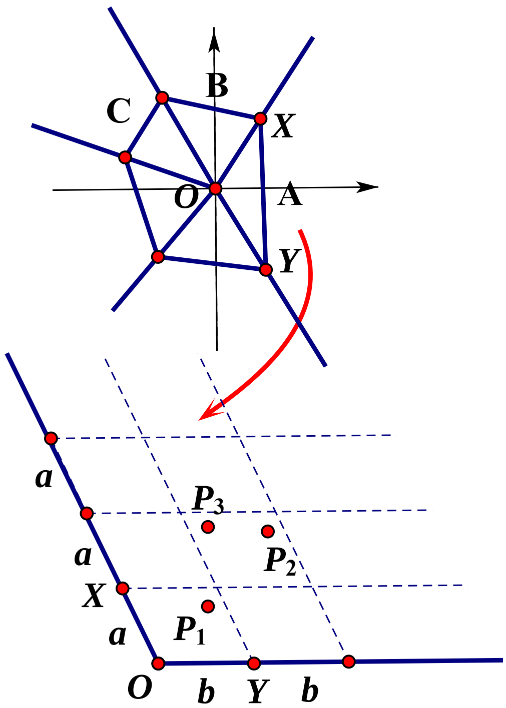
由条件知, 其中有两个不相邻点之间有边. 而 A 不与 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 相连. 此边形如 C_iC_j $(0 \leq i < j \leq t+1$, 这里 $C_0 = B_1, C_{t+1} = B_2)$, 则 $C_0C_1\cdots C_iC_jC_{j+1}\cdots C_{t+1}$ 是一条更短路, 矛盾!

故 $(*)$ 成立, 从而 $l' = l''$. 由前证知结论成立, 证毕! □

评注 此题的关键是考察含某点的 i 阶完全子图个数与子图 G' 的 i 阶完全子图个数和 G'' 的 $i-1$ 阶完全子图个数的和, 即公式 $c_i = c'_i + c''_{i-1}$. 结合利用归纳法将问题转为证明 G' 和 G'' 的连通分支个数相同.

第 5 题 给定平面上包含原点 O 且顶点在格点上的凸多边形. 令 V_1 是由从 O 出发指向多边形顶点的向量所构成的集合, V_2 是由从 O 出发指向在多边形内部或边界上的格点的向量所构成的集合. 两只蚱蜢按如下规则在平面上跳跃: 第一只蚱蜢每次跳跃的轨迹是 V_1 中的向量, 第二只蚱蜢每次跳跃的轨迹是 V_2 中的向量. 证明: 存在正整数 c, 使得以下条件成立: 若两只蚱蜢均从 O 跳到点 P, 且第二只蚱蜢需 n 次跳跃完成, 则第一只蚱蜢可以用至多 $n+c$ 次跳跃完成.

证明 (谢柏庭) 首先, 我们取从 O 指向凸多边形的各个顶点的射线, 将平面分为若干个区域 (包括边界). 我们证明: 对某个区域 A (包括边界) 的任一格点 P, 若两只蚱蜢均能由 O 跳到 P, 则存在只与 A 有关的常数 c_A 使得若第二只蚱蜢需 n 步跳从 O 到 P, 则第一只蚱蜢可用至多 $n+c_A$ 步完成.



我们将区域 A 分划为如图的平行四边形表, 即在射线 OX 上每隔 $|OX|$ 距离作一条与 OY 平行的射线, 对射线 OY 做同样的操作 (若 $\angle XOY=\pi$ 时, 除 X,O,Y 上的点外, 其他的点均跳不到, 取 $c_A=a+b$ 即可, 其中 $a=|OX|,b=|OY|$). 记一个平行四边形区域的坐标为 (i,j), 若其从左往右是第 i 个, 从下往上是第 j 个; 我们称两个格点是同位置的, 若其位于 A 中两个平行四边形中, 且是这两个全等的平行四边形的对应点. (如图, P_1 与 P_2 同位置, 但 P_1 与 P_3 不是).

而对于每个位置 T, 要么这个位置上的格点, 有以下两种可能:

(i) 第一只蚱蜢跳不到位置 T.

(ii) 第一只蚱蜢跳可以到达某些四边形中的位置 T. 取 (i_{T_1},j_{T_1}) 是这些四边形中第一个分量最小的, 再取 (i_{T_2},j_{T_2}) 是这些四边形中第二个分量最小的 (若有多个四边形满足, 任取一个即可).

注意到位置是有限的,当 T 遍历所有可能的位置时, 设 $\max\{i_{T_2}\}=i_A$, $\max\{j_{T_1}\}=j_A$ (易知 i_A,j_A 只与 A 有关). 记 $\Gamma=\{(x,y)\bigm| x\le i_A \text{ 且 } y\le j_A\}$.

设 c_A 为第一只蚱蜢跳到 Γ 中的某一点所需的最小跳跃次数的最大值, 即用至多 c_A 次跳跃, 第一只可到 Γ 中任一有限次跳跃可到达的点, 则 c_A 只与 A 有关.

下面证明: 对于某一位置 T 在 (i,j) 中的格点 P, 若两只均可到达且第二只蚱蜢需 n 次跳跃到达, 则第一只蚱蜢可用至多 $n+c_A$ 次跳跃到达. $(*)$

当 $(i,j)\in\Gamma$ 时, 结论显然成立.

当 $(i,j)\notin\Gamma$ 时, 注意到两只蚱蜢跳入 (i,j) 至少需 $i+j$ 次 (因为每次蚱蜢可跳跃时,它所在的平行四边形的坐标的两个分量至多有一个分量增加1), 即有$n\geq i+j$.

不妨设 $i>i_A$, 又 $j\geq j_{T_2},i_A\geq i_{T_2}$, 故 $i>i_{T_2},j\geq j_{T_2}$ (用到 i_A 的最大性, j_{T_2} 最小性). 那么第一只蚱蜢可先跳到平行四边形 $(i-i_{T_2}+1,j-j_{T_2}+1)$ 的左下顶点, 需 $i+j-i_{T_2}-j_{T_2}$ 步, 由于 $j_{T_2}\leq j_{T_1}\leq j_A,i_{T_2}\leq i_A$,其再到 P 点至多再需 c_A 步. 由 $i+j+c_A\geq i+j-i_{T_2}-j_{T_2}+c_A$ 和 $n\geq i+j$ 知 $(*)$ 成立.

最后, 我们取 $c=\max\{c_A\}$ 即可满足要求. $\square$

评注 本题的难点是如何分析第一只蚱蜢跳到某一点所需的步数. 上面的解法的关键是以原点指向多边形各顶点的射线为界, 将平面分成有限个区域. 通过将每个区域内的格点分成有限类, 进而对第一只蚱蜢所能达到的位置所需步数进行分析得到结论.