数学新星网 ※ 教师专栏
www.nsmath.cn/jszl

第 59 届国际数学奥林匹克

瞿振华

(华东师范大学数学系, 200241)

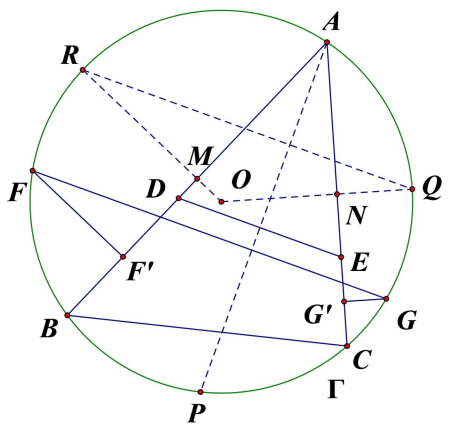
罗马尼亚　克卢日纳波卡

第一天

7 月 9 日　9:30 – 14:00

1. 设 Γ 是锐角三角形 ABC 的外接圆. 点 D 和 E 分别在线段 AB 和 AC 上, 满足 $AD=AE$. 线段 BD 和 CE 的垂直平分线分别与 Γ 的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 交于点 F 和 G. 证明: 直线 DE 与 FG 平行(或重合).

证明 如图所示, 点 P,Q,R 分别是 Γ 上劣弧 $\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA},\overset{\frown}{AB}$ 的中点, 点 M,N 分别是线段 AB,AC 的中点, O 是 Γ 的圆心, 于是 O,M,R 共线, O,N,Q 共线.



由 $AD=AE$, AP 平分 $\angle BAC$, 可知 $AP\perp DE$. 另一方面

$$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AQ}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{PBR}=\frac{B}{2}+\frac{A+C}{2}=90^\circ,$$

故 $QR\perp AP$, 从而 $DE /\!/ RQ$.

只需证明 $FG /\!/ RQ$, 这等价于 $\overset{\frown}{FR}=\overset{\frown}{GQ}$. 设 F',G' 分别是线段 BM,CN

收稿日期: 2018-07-25.

的中点, 则 $FF' \perp AB$, $GG' \perp AC$, 从而 $FF' \parallel OR$, $GG' \parallel OQ$. 由于

$$F'M = BM - BF' = \frac{1}{2}(AB - BD) = \frac{AD}{2} = \frac{AE}{2} = G'N,$$

故直线 FF' 与 GG' 分别到 Γ 的过圆心的直线 OR 与 OQ 的距离相等, 故 $\widehat{FR} = \widehat{GQ}$, 结论获证. □

2. 求所有整数 $n \geq 3$, 使得存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$, 满足 $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, 并且对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

(斯洛伐克 供题)

解 所求 n 是所有 3 的倍数.

一方面, 若 n 是 3 的倍数, 设 $n = 3k$, 取 $a_{3i-2} = a_{3i-1} = -1$, $a_{3i} = 2$, $i = 1, 2, \cdots, k$, $a_{n+1} = a_{n+2} = -1$, 容易验证对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 都有 $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$, 满足要求.

另一方面, 假设存在满足条件的 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+2}$, 将其延拓为以 n 为周期的两端无穷的序列, 则对任意整数 i, 都有 $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$. 我们依次证明以下结论.

(1) 不存在 i, 使得 $a_i > 0$, $a_{i+1} > 0$.

如果存在这样的 i, 使得 $a_i > 0$, $a_{i+1} > 0$, 则 $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1$. 易用归纳法证明, 对所有 $m \geq i+2$, 都有 $a_m > 1$, 从而对 $m \geq i+2$, 有

$$a_{m+2} = a_m a_{m+1} + 1 > a_m a_{m+1} > a_{m+1},$$

于是 $a_{m+1} < a_{m+2} < a_{m+3} < \cdots < a_{m+n+1}$, 这与 $a_{m+n+1} = a_m$ 矛盾.

(2) 不存在 i, 使得 $a_i = 0$.

如果存在这样的 i, 使得 $a_i = 0$, 则 $a_{i+1} = a_{i-1} a_i + 1 = 1$, $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 = 1$, 这与 (1) 矛盾.

(3) 不存在 i, 使得 $a_i < 0$, $a_{i+1} < 0$, $a_{i+2} < 0$.

如果存在这样的 i, 使得 $a_i < 0$, $a_{i+1} < 0$, $a_{i+2} < 0$. 则 $a_{i+2} = 1 + a_i a_{i+1} > 0$, 矛盾.

(4) 不存在 i, 使得 $a_i > 0$, $a_{i+1} < 0$, $a_{i+2} > 0$.

如果存在这样的 i, 使得 $a_i > 0$, $a_{i+1} < 0$, $a_{i+2} > 0$, 则由 (1) 知, $a_{i-1} < 0$, $a_{i+3} < 0$. 由于 $0 < a_{i+2} = 1 + a_i a_{i+1} < 1$, 而 $|a_{i+1} a_{i+2}| = |a_{i+3} - 1| > 1$, 故 $|a_{i+1}| > 1$, 从而 $a_{i+1} < -1$. 又由 $|a_i a_{i+1}| = |a_{i+2} - 1| < 1$, 得 $|a_i| < 1$, 从

而 $0 < a_i < 1$. 再由 $a_{i-2}a_{i-1} = a_i - 1 < 0$, 得 $a_{i-2} > 0$. 由 $a_{i+1} < 0$, $0 < a_i < 1$, 可得

$$a_{i-1} = \frac{a_{i+1} - 1}{a_i} < a_{i+1} - 1 < a_{i+1}.$$

因此, 由 $a_i > 0$, $a_{i+1} < 0$, $a_{i+2} > 0$, 我们推出了 $a_{i-1} < 0$, $a_{i-2} > 0$, 并且 $a_{i-1} < a_{i+1}$. 用归纳法易知, 对 $k \geq 0$, 有 $a_{i-2k} > 0$, $a_{i-2k+1} < 0$, 并且

$$a_{i+1} > a_{i-1} > a_{i-3} > a_{i-5} > \cdots.$$

特别有 $a_{i+1} > a_{i+1-2n}$, 这与所定义的序列 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 以 n 为周期矛盾.

由 (1),(2),(3),(4) 可知任意连续三项 a_i, a_{i+1}, a_{i+2} 中恰有一项为正数, 两项为负数, 因此这个序列的符号以 3 为周期. 由于其中至少有一项是正数, 假设 $a_i > 0$, 则 $a_{i+n} > 0$, 从而 $3 \mid n$. □

3. 一个反帕斯卡三角形是由一些数排成的等边三角形数阵, 其中每个不在最后一行的数都恰好等于排在它下面的两个数的差的绝对值. 例如, 下面的数阵是一个反帕斯卡三角形, 它共有四行, 并且恰含有 1 至 10 中的每个整数.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

试问: 是否存在一个共有 2018 行的反帕斯卡三角形, 恰含有 1 至 1+2+⋯+2018 中的每个整数?

(伊朗 供题)

解 不存在.

反证法, 假设存在这样一个反帕斯卡三角形. 记 $N = 1 + 2 + \cdots + 2018$, 将第 i 行中从左至右的第 j 个数记为 $a_{i,j}$. 设 $a_1 = a_{1,1}$, 将 a_1 下方的两个数中大的数记为 a_2, 小的数记为 b_2, 又将 a_2 下方的两个数中大的数记为 a_3, 小的数记为 b_3, 如此下去, 我们将 a_i 下方的两个数中大的数记为 a_{i+1}, 小的数记为 b_{i+1}, $i = 1, 2, \cdots, 2017$.

由反帕斯卡三角形的定义, 有 $a_i = a_{i+1} - b_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, 2017$, 因此

$$a_{2018} = a_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2018}.$$

由于 $a_1, b_2, b_3, \cdots, b_{2018}$ 是 2018 个互不相同的正整数, 故

$$a_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2018} \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 = N.$$

而 $a_{2018}\le N$, 故只能 $a_{2018}=N$, 并且 $\{a_1,b_2,b_3,\cdots,b_{2018}\}=\{1,2,3,\cdots,2018\}$.

设 $a_{2018}=a_{2018,j}$, 由对称性, 不妨设 $j\le 1009$, 因此

$$a_{2018},b_{2018}\in\{a_{2018,1},a_{2018,2},\cdots,a_{2018,1010}\}.$$

于是 $a_1,a_2,\cdots,a_{2018},b_2,b_3,\cdots,b_{2018}$ 全部都在以下集合 S 中:

$$S=\{a_{i,j}|\, j\le 1010\}.$$

考虑剩下的反帕斯卡三角形

$$T=\{a_{i,j}|\, 1011\le i\le 2018,\ 1011\le j\le i\}.$$

记 $c_{2011}=a_{1011,1011}$, 对 $i=1011,1012,\cdots,2017$, 将 c_i 下方的两个数中大的数记为 c_{i+1}, 小的数记为 d_{i+1}. 由于 $c_i=c_{i+1}-d_{i+1}$, $i=1011,1012,\cdots,2017$, 于是

$$c_{2018}=c_{1011}+d_{1012}+d_{1013}+\cdots+d_{2018}.$$

由于 $c_{2011},d_{1012},d_{1013},\cdots,d_{2018}$ 均在 T 中, 不在 S 中, 它们都大于2018, 且互不相同, 故

$$c_{1011}+d_{1012}+d_{1013}+\cdots+d_{2018}\ge 2019+2020+\cdots+3026=2542680>N=2037171.$$

这与 $c_{2018}\le N$ 矛盾. 因此反证法假设不成立, 满足题意的反帕斯卡三角形不存在. □

第二天

7 月 10 日　9:30 – 14:00

4. 我们所谓一个**位置**是指直角坐标平面上的一个点 (x,y), 其中 x,y 都是不超过 20 的正整数.

最初时, 所有 400 个位置都是空的. 甲乙两人轮流摆放石子, 由甲先进行. 每次轮到甲时, 他在一个空的位置上摆上一个新的红色石子, 要求任意两个红色石子所在位置之间的距离都不等于 $\sqrt{5}$. 每次轮到乙时, 他在任意一个空的位置上摆上一个新的蓝色石子 (蓝色石子所在位置与其它石子所在位置之间距离可以是任意值). 如此这般进行下去直至某个人无法再摆放石子.

试确定最大的整数 K, 使得无论乙如何摆放蓝色石子, 甲总能保证至少摆放 K 个红色石子.

(亚美尼亚 供题)

解　$K=100$.

首先, 甲有策略可以保证至少摆放 100 个红色石子. 将所有位置分为奇偶两类, 若 $2 \nmid x+y$, 则称位置 (x,y) 是奇位置, 否则称其为偶位置. 由于任意两个奇位置之间的距离都不等于 $\sqrt{5}$, 且奇位置共有 200 个, 故甲可以在前 100 次轮到自己时都在空的奇位置上摆放红色石子, 这样甲可以保证至少摆放 100 个红色石子.

其次, 乙有策略让甲不能摆放 101 个红色石子. 考虑一个 4×4 的点阵, 可以分成 4 组, 如下所示, 标记同一个字母的四个位置为一组.

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \\ B & A & D & C \\ D & C & B & A \end{matrix}$$

同一组的四个位置, 将其中距离等于 $\sqrt{5}$ 的两个点连线, 均构成一个平行四边形. 乙采用如下策略, 先将 400 个位置分成 25 个 4×4 的点阵, 每个点阵中都按上图方式分成 4 组, 每组 4 个点, 并且在每组中将距离为 $\sqrt{5}$ 的两个点连线, 这样构成了 100 个平行四边形. 甲每次在某个平行四边形中选择了一个顶点摆放红色石子 P, 乙就在这个平行四边形上与 P 相对的顶点上摆放蓝色石子, 这样与 P 相邻的两个顶点上甲都不能再摆放红色石子. 这样甲在每个平行四边形上至多摆放一个红色石子, 因此甲无法摆放 101 个红色石子.

综上可知, 所求 $K = 100$. □

5. 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个无限项正整数序列. 已知存在整数 $N > 1$, 使得对每个整数 $n \geq N$,

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

都是整数. 证明: 存在正整数 M, 使得 $a_m = a_{m+1}$ 对所有整数 $m \geq M$ 都成立.

(蒙古 供题)

证明 由条件可知, 对整数 $n \geq N$,

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right) - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}$$

是整数. 从而对 $n \geq N$,

$$\frac{a_1 a_n}{a_{n+1}} + a_{n+1} - a_n$$

是整数, 于是 $a_{n+1} \mid a_1 a_n$. 由归纳法易证, 对 $n \geq N$, 有 $a_n \mid a_1 a_N^{n-N}$. 设 P 是 $a_1 a_N$ 的所有素因子构成的集合, 则 P 是有限集合. 对 $n \geq N$, 由于 $a_n \mid a_1 a_N^{n-N}$, 故 a_n

的素因子都在 P 中.

要证明 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 最终常数, 只需对每个素数 $p\in P$, 证明 $\{v_p(a_n)\}_{n\geq 1}$ 最终常数.

设 $p\in P$, $n\geq N$, 则下面两个结论必居其一:

(i) $v_p(a_{n+1})\leq v_p(a_n)$;

(ii) $v_p(a_{n+1})>v_p(a_n)$, 且 $v_p(a_{n+1})=v_p(a_1)$.

事实上, 若 $v_p(a_{n+1})>v_p(a_n)$, 则 $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}})<0$, $v_p(\frac{a_n}{a_1})<v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})$, 由于

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}\right)\geq 0,$$

再结合 $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}})<0$ 可知, $v_p(\frac{a_n}{a_{n+1}}),v_p(\frac{a_n}{a_1}),v_p(\frac{a_{n+1}}{a_1})$ 中的最小值至少出现两次, 故

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right),$$

即 $v_p(a_{n+1})=v_p(a_1)$.

我们再证明(iii): 若 $v_p(a_n)=v_p(a_1)$, 其中 $n\geq N$, $p\in P$, 则 $v_p(a_{n+1})=v_p(a_1)$.

若 $v_p(a_{n+1})\neq v_p(a_1)$, 则由 (i) (ii) 可知, 只能 $v_p(a_{n+1})<v_p(a_n)=v_p(a_1)$. 此时

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)>0,\quad v_p\left(\frac{a_n}{a_1}\right)=0,\quad v_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)<0,$$

从而

$$v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}\right)=v_p\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)<0,$$

这与 $\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}-\frac{a_n}{a_1}$ 是整数矛盾.

设 $p\in P$. 分两种情形讨论.

情形一: 对所有 $n\geq N$, 都有 $v_p(a_{n+1})\leq v_p(a_n)$. 此时 $\{v_p(a_n)\}_{n\geq N}$ 是单调不增的非负整数序列, 最终常数.

情形二: 存在 $n_0\geq N$, 使得 $v_p(a_{n_0+1})>v_p(a_{n_0})$. 由 (ii) 知, $v_p(a_{n_0+1})=v_p(a_1)$. 再由 (iii) 及归纳法可知, 对 $n\geq n_0$, 都有 $v_p(a_n)=v_p(a_1)$, 从而 $\{v_p(a_n)\}$ 也是最终常数的. □

6. *在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB\cdot CD=BC\cdot DA$. 点 X 在四边形 $ABCD$ 内部, 且满足*

$$\angle XAB=\angle XCD,\quad \angle XBC=\angle XDA.$$

证明: $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

(波兰 供题)

证明 首先注意到, 我们只需证明

$$\frac{XB}{XD} = \frac{AB}{CD}, \tag{1}$$

以及

$$\frac{XA}{XC} = \frac{DA}{BC}. \tag{2}$$

这是因为由 (1) 及正弦定理, 得

$$\frac{\sin\angle AXB}{\sin\angle XAB} = \frac{AB}{XB} = \frac{CD}{XD} = \frac{\sin\angle CXD}{\sin\angle XCD},$$

再由题目条件 $\angle XAB = \angle XCD$, 得 $\sin\angle AXB = \sin\angle CXD$. 类似地, 由 (2) 可得

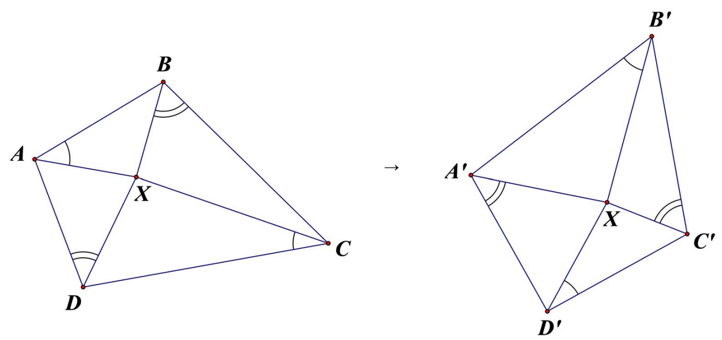
$$\sin\angle DXA = \sin\angle BXC.$$

如果 $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$, 或 $\angle DXA + \angle BXC = 180^\circ$, 则结论成立. 如果

$$\angle AXB = \angle CXD, \quad \angle DXA = \angle BXC,$$

则 X 是 AC, BD 的交点, 由条件可知 $ABCD$ 是平行四边形. 再由 $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ 可知, $ABCD$ 是菱形, 此时 $AC \perp BD$, 结论仍然成立.

下面证明 (1) 和 (2) 成立. 以 X 为中心, 1为半径做反演变换. 分别以 A', B', C', D' 表示 A, B, C, D 反演后的像. 如下图所示.



由于 $XA \cdot XA' = XB \cdot XB' = XC \cdot XC' = XD \cdot XD'$, 故三角形 XAB 与 $XB'A'$ 相似, 三角形 XBC 与 $XC'B'$ 相似, 故

$$\angle XB'A' = \angle XAB = \angle XCD, \quad \angle XCB = \angle XB'C',$$

从而

$$\angle BCD = \angle BCX + \angle XCD = \angle XB'C' + \angle A'B'X = \angle A'B'C'.$$

类似可得 $\angle CDA=\angle B'C'D'$, $\angle DAB=\angle C'D'A'$, $\angle ABC=\angle D'A'B'$. 故四边形 $ABCD$ 与 $D'A'B'C'$ 的对应内角相等. 又利用相似可知,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{XB'}{XA}=\frac{1}{XA\cdot XB},$$

故 $A'B'=\frac{AB}{XA\cdot AB}$. 对 $B'C',C'D',D'A'$ 也有类似的计算公式. 于是

$$A'B'\cdot C'D'=\frac{AB}{XA\cdot XB}\cdot\frac{CD}{XC\cdot XD}=\frac{BC}{XB\cdot XC}\cdot\frac{DA}{XD\cdot XA}=B'C'\cdot D'A'.$$

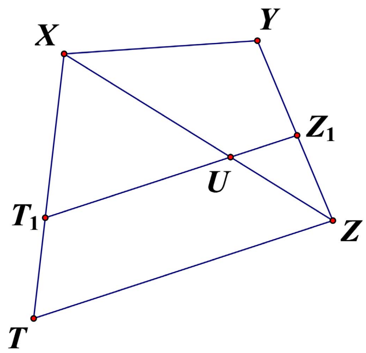
因此 $ABCD$ 与 $D'A'B'C'$ 具有相同的内角, 以及对边乘积相等的性质, 我们证明它们是相似的四边形.

引理 设 $XYZT$ 和 $X'Y'Z'T'$ 是两个凸四边形, 对应的内角相等, 并且

$$XY\cdot ZT=YZ\cdot TX,\quad X'Y'\cdot Z'T'=Y'Z'\cdot T'X',$$

则这两个四边形相似.

引理的证明　作四边形 XYZ_1T_1 与 $X'Y'Z'T'$ 相似, T_1 和 Z_1 分别在射线 XT 和 YZ 上. 假设 $XYZT$ 与 $X'Y'Z'T'$ 不相似, 则 $T_1\neq T$, $Z_1\neq Z$. 并且由于内角相同, $T_1Z_1\parallel TZ$. 不妨设 T_1 在线段 XT 的内部. 设线段 XZ,T_1Z_1 交于点 U.



于是

$$\frac{T_1X}{T_1Z_1}<\frac{T_1X}{T_1U}=\frac{TX}{ZT}=\frac{XY}{YZ}<\frac{XY}{YZ_1},$$

从而 $T_1X\cdot YZ_1<T_1Z_1\cdot XY$, 矛盾.

回到原题中, 我们证明了 $ABCD$ 与 $D'A'B'C'$ 相似. 于是

$$\frac{BC}{AB}=\frac{A'B'}{D'A'}=\frac{AB}{XA\cdot XB}\cdot\frac{XD\cdot XA}{DA}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{XD}{XB},$$

从而

$$\frac{XB}{XD}=\frac{AB^2}{BC\cdot AD}=\frac{AB^2}{AB\cdot CD}=\frac{AB}{CD}.$$

我们证明了 (1), 类似地证明 (2). □