第二十六期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 给定正整数 n. 已知复数 $z_1,\ldots,z_n$ 的和为零, 求

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i^2+1|$$

的最小值.

(西北师大附中学生 张江昊 供题)

解 (根据供题者的解答整理):

当 n 为偶数时最小值显然为零. 下面我们证明 n 为奇数时最小值为 1 (取等条件易见). 注意到 $|z_i^2+1|=|z_i+i|\cdot|z_i-i|$. 由于

$$|z_i+i|+|z_i-i|\geq|2i|=2,$$

我们有 $\max\{|z_i+i|,|z_i-i|\}\geq 1$. 所以 $|z_i^2+1|\geq\min\{|z_i+i|,|z_i-i|\}$. 求和得到 (在 n 为奇数时)

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i^2+1|\geq\sum_{i=1}^{n}|z_i\pm i|\geq|\sum_{i=1}^{n}(z_i\pm i)|\geq 1.$$

于是命题得证! $\square$

评注 山东省实验中学付艺渲, 江苏省徐州一中陈博文, 苏州中学吴雨桐, 浙江省镇海中学严君啸, 骆晗, 华南师大附中谭健翔等同学以及重庆学而思聂浩川老师也给出了本题的正确解答. 其中很多份解答都是用调整法处理的.

第二题. 设 p 是除四余一的素数. 证明存在数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 且 $p\nmid a_n$ 对每个 n 成立.

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

证明 (根据苏州中学吴雨桐同学的解答整理):

考虑斐波那契数列 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$. 注意到

$$F_n\cdot F_{n+1}=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-(-1)^n\right].$$

对除四余一的素数 p, 令 $n=\frac{p-1}{2}$ 为偶数. 则

$$\begin{aligned}5F_n\cdot F_{n+1}&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p-1\\&=\frac{1}{2^{p-1}}\left(1+\binom{p}{2}\cdot 5+\binom{p}{4}5^2+\cdots+\binom{p}{p-1}\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}-2^{p-1}\right).\end{aligned}$$

所以当 $p>5$ 时必有 $p\mid F_{\frac{p-1}{2}}\cdot F_{\frac{p+1}{2}}$. 由此可知 $\frac{F_{i+1}}{F_i}$ 在模 p 意义下至多取 $\frac{p-3}{2}$ 个非零值:

$$\frac{F_2}{F_1},\frac{F_3}{F_2},\dots\frac{F_{\frac{p-1}{2}}}{F_{\frac{p-3}{2}}}.$$

我们取一个非零剩余 r 使得 $r\neq\frac{F_{i+1}}{F_i},\forall i$. 然后令 $a_1=r,a_2=-1$, 注意到 $F_{-1}=1,F_0=0$, 于是由归纳可证 $a_{i+2}=F_ir-F_{i+1}$. 所以 $p\nmid a_{i+2}$ 对每个 i 成立. □

评注 桐乡市高级中学褚晓敏, 山东省实验中学付艺渲, 江苏省徐州一中陈博文, 浙江省镇海中学严君啸, 骆晗, 华南师大附中谭健翔等同学以及重庆学而思聂浩川老师也给出了本题的正确解答.

第三题. 求最大的常数 λ, 使得对任意正整数 n 以及任意实数 $a_1,\dots,a_n$, 只要 $\sum_{i=1}^n a_i^3=0$, 就有

$$\sum_{i=1}^n a_i^4\geq\frac{\lambda}{n^3}\cdot\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^4.$$

(上海中学学生 张盛桐 供题)

解 (根据根据莆田第一中学洪昕同学的解答整理):

最大的常数 λ 是 $\frac{27}{4}$.

首先可以假设 $a_1+\dots a_n\neq 0$, 然后不妨设 $a_1+\cdots+a_n=n$. 我们来证明

$$\sum_{i=1}^n a_i^4\geq\frac{27}{4}n.$$

令 $u=\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}$, $v=\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$. 则对任意实数 x 有 $(x-u)(x-v)=x^2+3x-\frac{9}{2}$, 所以

$$0\leq(x-u)^2(x-v)^2=x^4+6x^3-27x+\frac{81}{4}.$$

分别令 $x=a_1,a_2,\dots,a_n$ 并求和, 得到

$$0\leq\sum_{i=1}^n a_i^4+6\sum_{i=1}^n a_i^3-27\sum_{i=1}^n a_i+\frac{81}{4}n.$$

利用 $\sum_{i=1}^n a_i^3=0,\sum_{i=1}^n a_i=n$, 即有 $\sum_{i=1}^n a_i^4\geq\frac{27}{4}n$.

反过来, 为证明 $\frac{27}{4}$ 不可改进, 我们考虑充分大的 n, 将其写为 $n=p+q$, 其中 $\frac{p}{q}$ 逼近 $\frac{v^3}{-u^3}$. 此时可令 $a_1=\cdots=a_p\approx u$, 而 $a_{p+1}=\cdots=a_n\approx v$. 直接计算可得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\approx n$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4\approx\frac{27}{4}n$. $\square$

评注 (1). 浙江省镇海中学骆晗, 华南师大附中谭健翔等同学以及重庆南开中学匿名网友土拨鼠也给出了本题的正确解答.

(2). 上面解答中选取的 u,v 看似毫无踪迹可循, 其实是可以通过待定系数求出的. 具体来说, 我们想利用 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-u)^2(a_i-v)^2\geq 0$ 得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^4$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 的关系. 由于条件已经给出 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3$, 我们只要保证 $(x-u)^2(x-v)^2$ 的展开中没有二次项. 这样就确定了 u 与 v 的比值. 至于为什么考虑 $(a_i-u)^2(a_i-v)^2$, 这主要基于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=0$ 的条件. 在这个条件下, 等号成立要求 $a_1\sim a_n$ 至少取两个值, 而 $(a_i-u)^2(a_i-v)^2$ 是唯一有两个不同重根的四次多项式.

第四题. 给定平面上无三点共线的 10^{2018} 个点. 证明: 可以从中找出 10^{670} 个点, 它们两两间的距离互不相等.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据华南师大附中谭健翔同学的解答整理):

记 $n=10^{2018}$, 而 S 为给定的 n 元点集. 令 $d_1,\ldots,d_m$ 为 S 中所有可能的两点距离, 并设 a_i 为距离 d_i 出现的次数.

我们首先证明 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i^2<n^3$. 为此考虑如下的有序三元组:

$$X=\{(p,q,r)\in S,p\neq q\neq r,|pq|=|pr|\}.$$

一方面, 固定点 q 与 r, 点 p 一定在 qr 的中垂线上. 由条件无三点共线, 故这样的三元组至多有 $2\binom{n}{2}=n(n-1)$.

另一方面, 固定距离 d_i, 则满足 $|pq|=|pr|=d$ 的三元组至少有

$$n\cdot\binom{\frac{2a_i}{n}}{2}=\frac{2}{n}a_i^2-a_i.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{2}{n}a_i^2-a_i\leq n(n-1)$, 由此得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^2\leq\frac{n}{2}\cdot n(n-1)+\frac{n}{2}\cdot a_i<n^3.$$

接下来我们考虑 S 中的所有(无序)四元子集 $X=\{p,q,r,s\}$, 使得 X 中的点两两距离有重复. 通过对 X 中的点重新排序, 可以假设 $|pq|=|pr|$ 或者 $|pq|=|rs|$. 由之前的分析, 满足前一个条件的 X 至多有 $n\cdot n(n-1)<n^3$ 个 (其中第一个 n 表示点 s 可以任选). 而满足 $|pq|=|rs|$ 的四元集 X 恰

有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\binom{a_i}{2}\le\frac{n^3}{2}$. 因此所有这样的集合 X 的总个数不超过 $\frac{3}{2}n^3$.

有了这些估计, 我们终于可以来构造满足条件的 10^{670} 元子集了. 设 $p\in(0,1)$ 为待定的数, 以概率 p 将每个点随机取出, 得到集合 T. 则 T 的元素个数期望值为 np. 而每个"坏的"四元子集 X 被全部选出的概率为 p^4, 因此 T 中包含的坏子集 X 的个数期望值至多为 $\frac{3}{2}n^3p^4$. 如果对每个 T 中的坏子集 X, 将 X 中任意两个点从 T 中删除, 那么最后得到的集合 T^* 满足两两距离互不相等, 并且 T^* 的元素个数期望值至少是 $np-3n^3p^4$. 取 $p=\frac{1}{2}n^{-\frac{2}{3}}$, 则

$$np-3n^3p^4=\frac{5}{16}n^{\frac{1}{3}}.$$

故一定存在某个 T^* 含有这么多个元素. 命题得证! $\square$

评注 这个证明用到概率方法中的两个重要技巧: 期望值的线性, 以及随机选取后的删减调整. 更多的应用可见 Alon 和 Spencer 的书.