一道组合难题的解法分析

冯跃峰

2018 年 IMO 第 3 题是一道非常有趣的组合题, 但难度很大. 比如, 参赛的绝大部分国家队在本题上都得 0 分, 而中国队得分最高, 得分率也不到 41%, 只得 17 分. 下面是我们对该题解法的一些思考, 请大家指正.

题目 反帕斯卡三角形是一个正三角形数阵, 满足: 除最下面一行, 每个数是它下方相邻两个数的差的绝对值. 例如, 下面是一个 4 行的反帕斯卡三角形, 包含 1 到 10 的所有整数.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

试问: 是否存在 2018 行的反帕斯卡三角形, 包含 1 到 $1+2+\cdots+2018$ 的所有整数?

(2018 年 IMO 第 3 题)

【**题感**】从目标看, 本题属于探索性问题. 简单地说, 就是讨论是否存在合乎要求的 2018 阶三角形数表. 由于结论并不知道, 自然可从特例入手, 从中发现规律.

【**研究特例**】对于 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$, 不难发现相应的 n 阶数表存在. 为了寻找规律, 我们把所有可能的数表列举如下:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3 & & 4 & \\ 5 & & 2 & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 4 & & 1 & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 1 & & 4 & \\ 5 & & 6 & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 2 & & 5 & \\ 4 & & 6 & & 1 \end{array}$$

收稿日期: **2018-7-28.**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 2 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 4 & \\ 8 & & 1 & & 10 & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 4 & & 7 & & \\ & 5 & & 9 & & 2 & \\ 6 & & 1 & & 10 & & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 1 & & 5 & & \\ & 6 & & 7 & & 2 & \\ 9 & & 3 & & 10 & & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 5 & & & & \\ & & & 4 & & 9 & & & \\ & & 7 & & 11 & & 2 & & \\ & 8 & & 1 & & 12 & & 10 & \\ 6 & & 14 & & 15 & & 3 & & 13 \end{array}$$

【发掘规律】从整体上看, 这些数表之间并没有明显的联系, 因而无法归纳构造的通式. 但观察部分元素 (子列), 则会有新的发现.

【局部观察】将每行的最大数与最小数标出, 你能发现什么规律吗？通过考察局部极端元, 不难发现合乎要求的 n 阶数表具有如下一些性质:

性质 1 从每一行看, 每行的最大数与最小数相邻.

性质 2 从每行的“最大数”看, 每行的最大数是下一行的最大数与最小数之差.

性质 3 从每行的“最小数”看, 各行的最小数恰好是表中最小的 n 个数, 即 $1, 2, \cdots, n$.

【下定义】为叙述问题方便, 称 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中的数为小数, 则每行恰有一个小数, 即该行的最小数.

【结构联想】怎样证明这些性质呢？这当然要利用表的构成规律: 广义差分序列. 由此想到, 割取其中的部分元素, 形成常规的差分序列.

【建立递推子列】设第 1 行的数是 a_1, 第 2 行的数的集合是 $\{a_2, b_2\}$, 其中 $a_2 > b_2$, 那么 $a_1 = a_2 - b_2$.

考察 a_2, 它是第 3 行相邻两数的差, 设 $a_2 = a_3 - b_3$. 如此下去, 可知对每个 a_i $(0 < i < n)$, 都存在第 $i+1$ 行相邻两数的差与其相等: $a_i = a_{i+1} - b_{i+1}$. 于是, $b_{i+1} = a_{i+1} - a_i$.

叠合, 得 $b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n - a_1$. 记 $b_1 = a_1$, 则 $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

【不等式控制】所以,

$$a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

但显然 $a_n \leq \frac{n(n+1)}{2}$, 所以, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 且所有不等式成立等号, 所以

$$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

这表明, 性质 3 成立.

由于 a_n, b_n 分别是第 n 行的最大、最小数, 它们的差是第 $n-1$ 行的最大数, 即 $a_{n-1}=a_n-b_n$ 是第 $n-1$ 行的最大数.

再由 b_{n-1} 是第 $n-1$ 行的最小数, 可得 $a_{n-2}=a_{n-1}-b_{n-1}$ 是第 $n-2$ 行的最大数. 如此下去可知, 对每个 $1 \le i \le n$, a_i, b_i 分别是第 i 行的最大、最小数, 性质1、2 成立.

【考察极端】这些性质还不足以估计表中有多少行, 还需要考察表中最大的若干个数 (称为大数) 的分布.

称哪些数为大数呢？我们期望任何两个不同的大数之差的绝对值为小数, 由此想到定义

$$B=\left\{\frac{n(n+1)}{2}-j \,\middle|\, 0 \le j \le n\right\}$$

中的数为大数, 则大、小数具有如下显然性质.

性质 4 两个不同的大数之差的绝对值为小数.

实际上,

$$|a-b| \le \frac{n(n+1)}{2}-\left(\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=n.$$

性质 5 表中除最后一行外, 其余行的大数都是下一行中的一个大数与一个小数的差.

实际上, 设 x 是大数, 则 $x=a-b$, 其中 a, b 是下一行中相邻两数.

如果 a 不是大数, 则

$$a<\frac{n(n+1)}{2}-n,\ x=a-b<a<\frac{n(n+1)}{2}-n,$$

矛盾.

如果 b 不是小数, 则

$$b>n,\ x=a-b<a-n \le \frac{n(n+1)}{2}-n,$$

矛盾.

观察表中所有大数的位置, 发现它分布在后面若干行中. 为了确定哪些行中有大数, 可引入待定参数.

【待定参数】设倒数第 i 行不含大数, 它等价于倒数第 i 行最大的数也不是大数, 即 $a_{n-i+1}<\frac{n(n+1)}{2}-n$ $(*)$

【充分条件】下面找一个充分条件, 确定 i 在怎样的范围取值时, 不等式 $(*)$ 必定成立.

因为 $a_{n-1}=a_n-b_n$, $a_{n-2}=a_{n-1}-b_{n-1}, \cdots, a_{n-i+1}=a_{n-i+1}-b_{n-i+2}$, 各

式相加, 得

$$\begin{aligned}a_{n-i+1} &= a_n - (b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-i} + 2)\\ &\le \frac{n(n+1)}{2} - (1+2+\cdots+\ (i-1))\\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2}.\end{aligned}$$

于是不等式 $(*)$ 成立的一个充分条件是 $\frac{i(i-1)}{2} > n$, 解得 $i > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. 这样, 对所有 $i > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$, 倒数第 i 行的最大数小于最小的大数, 从而所有大数都分布后面 $\left[\frac{1}{2} + \sqrt{2n}\right]$ 行.

【计数】由性质 4 可知, 第 n 行最多有 2 个大数相邻, 否则第 $n-1$ 行至少有两个小数, 矛盾. 于是第 n 行最多有 $2 + [\frac{n-2}{2}] = 1 + [\frac{n}{2}]$ 个大数.

由性质 5 可知, 第 $n-1$ 行最多有 2 个大数, 且有两个大数时必定相邻. 实际上, 设第 n 行唯一的小数为 x, 则第 $n-1$ 行的大数为 $A-x$, 其中 A 是第 n 行中与 x 相邻的大数. 但与 x 相邻的大数最多有 2 个, 且当 x 两侧的数都是大数时, 第 $n-1$ 行的 2 个大数必定相邻.

如果第 $n-2$ 行有 2 个大数, 则第 $n-1$ 行唯一的小数两侧的数都是大数, 与第 $n-1$ 行两个大数时必定相邻矛盾, 所以第 $n-2$ 行至多一个大数.

如此下去, 可知其它各行都至多一个大数.

但大数都分布在后面 i 行 $(i \le \frac{1}{2} + \sqrt{2n})$, 所以大数的总个数:

$$S \le\ (1 + [\frac{n}{2}]) + 2 + (i-2) = i + 1 + [\frac{n}{2}] \le \frac{1}{2} + \sqrt{2n} + 1 + \left[\frac{n}{2}\right].$$

又 $S = n+1$, 所以

$$n + 1 \le \frac{3}{2} + + \left[\frac{n}{2}\right] \le\ \frac{3+n}{2} + \sqrt{2n}.$$

去分母, 得 $n - 1 \le 2\sqrt{2n}$. 解得 $n \le 9$.

注 最佳的估计是 $n \le 5$, 从略.

【新写】设表有 n 行, 第一行的数是 $a_1 = b_1$, 依次考虑每个 a_{i-1} $(2 \le i \le n)$, 都有第 i 行的两个相邻数 a_i, b_i, 使 $a_{i-1} = a_i - b_i$. 于是, $b_i = a_i - a_{i-1}$. 叠合, 得

$$a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

但 $a_n \le \frac{n(n+1)}{2}$, 所以, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所有不等式等号成立,

$$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\} = 1, 2, \cdots, n.$$

称不大于 n 的数为小数, 不小于 $\frac{n(n+1)}{2} - n$ 的数为大数, 则第 i 行恰有一个

小数, 为 b_i, 且 b_i是第 i 行的最小数.

显然, 两个不同的大数之差的绝对值为小数；表中除最后一行外, 其余行的大数都是下一行中大数与小数的差.

由于 a_n, b_n 分别是第 n 行的最大、最小数, 所以它们的差 $a_{n-1} = a_n - b_n$ 是第 $n-1$ 行的最大数.

再由 b_{n-1} 是第 $n-1$ 行的最小数, 可得 $a_{n-2} = a_{n-1} - b_{n-1}$ 是第 $n-2$ 行的最大数.

如此下去可知, 对每个 $1 \le i \le n$, a_i 是第 i 行的最大数.

取 $i > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$, 则由

$$a_{n-1} = a_n - b_n,\ a_{n-2} = a_{n-1} - b_{n-1}, \cdots, a_{n-i+1} = a_{n-i+1} - b_{n-i+2},$$

得

$$\begin{aligned} a_{n-i+1} &= a_n - (b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-i+2}) \\ &\le \frac{n(n+1)}{2} - (1 + 2 + \cdots + (i-1)) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} < \frac{n(n+1)}{2} - n, \end{aligned}$$

a_{n-i+1} 不是大数.

从而大数都在后 $[\frac{1}{2} + \sqrt{2n}]$ 行.

易知, 第 n 行最多有 2 个大数相邻, 否则第 $n-1$ 行至少有两个小数, 矛盾. 于是第 n 行最多有 $2 + [\frac{(n-2)}{2}] = 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ 个大数.

进而, 第 $n-1$ 行最多有 2 个大数, 且有两个大数时必定相邻. 实际上, 设第 n 行唯一的小数为 x , 则第 $n-1$ 行的大数为 $A - x$, 其中 A 是第 n 行中与 x 相邻的大数. 但与 x 相邻的大数最多有 2 个, 且当 x 两侧的数都是大数时, 第 $n-1$ 行的 2 个大数必定相邻.

此外, 如果第 $n-2$ 行有 2 个大数, 则第 $n-1$ 行唯一的小数的两侧都是大数, 与第 $n-1$ 行两个大数时必定相邻矛盾, 所以第 $n-2$ 行至多一个大数.

如此下去, 可知其它各行都至多一个大数.

但大数都在后 $[\frac{1}{2} + \sqrt{2n}]$ 行, 其总个数:

$$S \le \ (1 + \left[\frac{n}{2}\right]) \ + 2 + \ ([1/2 + \sqrt{2n}] - 2) \le \frac{3+n}{2} + \sqrt{2n}.$$

又 $S = n+1$, 所以 $n + 1 \le \ \frac{3+n}{2} + \sqrt{2n}$. 解得 $n \le 9$. 故合乎条件的 2018 阶数表不存在. $\square$