2018 年清北测试试题解析

段钦瀚

(湖南省雅礼中学, 长沙, 410007)

今年 6 月份北京大学和清华大学相继在部分省市进行了数学学科竞赛测试, 考试时间均为 3 个小时, 测试均有四道题. 本文给出这些题目的解答及一些评价.

I. 试 题

一、 北大测试试题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=100°$, $\angle ACB=65°$, M,N 分别是边 AB,AC 上的点, 且满足 $\angle MCB=55°$, $\angle NBC=80°$. 求 $\angle NMC$.

2. 求出所有非负实系数多项式 $P(x)$ 满足

$$P(\sin x)+P(\cos x)=1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

3. 已知存在一个由非零实数组成的 2018×2018 数表满足: 数表中任意一个数等于其所在行和列其余 4034 个数的和的 k 分之一, 求整数 k 的所有可能值.

4. $P(x)$ 是一个非负整系数非零多项式. 已知存在正整数 a, 使得数列 $a_1=a$, $a_{n+1}=P(a_n)$ 满足: 集合 $A=\{p\mid p\text{ 为某项 }a_n\text{ 的素因数}\}$ 为有限集, 求所有满足条件的 $P(x)$.

二、 清华测试试题

1. 设正实数 $a_1,a_2,\cdots$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\le n^2,\forall n\in\mathbb{N}^+$. 求证: 对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{4}\log_2 n.$$

收稿日期: 2018-07-10; 修订日期: 2018-08-05.

2. 给定凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$. 证明: 存在凸多边形内部一点 P, 使得对任意过点 P 的直线 l, l 与凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界交于 U,V 两点, 且满足

$$\frac{1}{2}\le\frac{PU}{PV}\le 2.$$

3. 设 n 为大于 100 的正整数. 对任意不超过 n 的素数 p, 记 α_p 为 $n!$ 中 p 的次数, 证明: 可以对每个不超过 n 的素数 p, 指定一个不超过 n 的互不相同的正整数 β_p, 使得 $1+\alpha_p\mid\beta_p$.

4. 设 $n,a,b\in\mathbb{N}^+$, $a\le b\le n-a$, $X=\{1,2,\cdots,n\}$, 给定 A_0 为 X 的 a 元子集.

(1) 设 $A\subseteq X$, $|A|=a$, $|A\cap A_0|=i$, 对 $0\le j\le a$, 求满足以下条件的集合 B 的个数:

$$A\subseteq B\subseteq X,\ |B|=b,\ |B\cap A_0|=j.$$

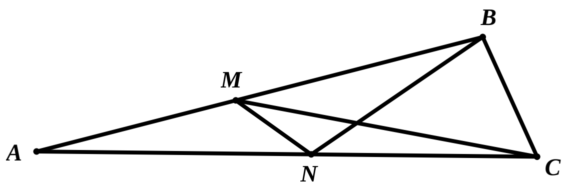
(2) 证明: 可以给每个 X 的 b 元子集 B 赋上实数 $f(B)$, 使得对 $A\subseteq X$, $|A|=a$, 均满足:

$$\sum_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ |B|=b}} f(B)=\begin{cases}0, & A\ne A_0\\ 1, & A=A_0\end{cases}.$$

II. 解答和评注

一、 北大测试试题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=100^\circ$, $\angle ACB=65^\circ$, M,N 分别是边 AB,AC 上的点, 且满足 $\angle MCB=55^\circ$, $\angle NBC=80^\circ$. 求 $\angle NMC$.



解 设 $\angle NMC=\alpha$. 对 $\triangle MNC$, $\triangle MNB$, $\triangle CNB$ 运用正弦定理有

$$\frac{CN}{\sin\alpha}=\frac{MN}{\sin\angle MCN}=\frac{MN}{\sin 10^\circ};$$
$$\frac{MN}{\sin 20^\circ}=\frac{MN}{\sin MBN}=\frac{BN}{\sin NMB}=\frac{BN}{\sin(\alpha+25^\circ)};$$
$$\frac{BN}{\sin 65^\circ}=\frac{BN}{\sin\angle BCN}=\frac{CN}{\sin\angle NBC}=\frac{CN}{\sin 80^\circ}.$$

三式相乘可知: $\sin\alpha\sin 20^\circ\sin 65^\circ=\sin 10^\circ\sin(\alpha+25^\circ)\sin 80^\circ$, 从而

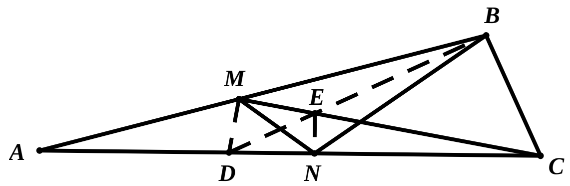
$$\frac{\sin(\alpha+25^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 20^\circ\sin 65^\circ}{\sin 10^\circ\sin 80^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cos 25^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ},$$

则

$$\angle NMC=\alpha=25^\circ.$$

□

另解 过 B 作 BC 的垂线分别交 AC, MC 于点 D, E. 连接 MD, EN.



由题意可知 $\angle ABD=\angle NBD=\angle MCA=10^\circ$, 故 M,D,C,B 与 E,N,C,B 均四点共圆, 所以 $\angle END=\angle EBC=\angle MDE=90^\circ$, 则 M,D,E,N 四点共圆. 故 $\angle NMC=\angle BDC=90^\circ-\angle BCA=25^\circ$. □

评析 这是一道简单题. 但这类题目需要短时间内做出来, 则用三角计算比几何做法更为保险. 还有一些其他想法, 例如注意到 C 为 $\triangle MNB$ 的旁心.

2. 求出所有非负实系数多项式 $P(x)$ 满足

$$P(\sin x)+P(\cos x)=1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

解 由题意可知: 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$P(\sin x)+P(\cos x)=1=P(\sin(-x))+P(\cos(-x))=P(-\sin x)+P(\cos x).$$

所以 $P(\sin x)=P(-\sin x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 即

$$P(t)=P(-t),\ \forall t\in[-1,1].$$

故 $P(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数. 又 $P(x)$ 为非负实系数多项式, 故 $P(x)$ 无奇次项 (奇次项系数为 0). 否则对 $x\in(0,1]$, $P(x)>P(-x)$, 矛盾!

由此可知, 存在非负实系数多项式 $Q(x)$ 满足 $P(x)=Q(x^2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 则 $Q(\sin^2 x)+Q(\cos^2 x)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 即

$$Q(t)+Q(1-t)=1,\ t\in[0,1].$$

设 $Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, 其中实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n\geq 0$, $a_n\neq 0$. 令 $x=0$, 则

$$Q(0)+Q(1)=\sum_{i=0}^{n}a_i+2a_0=1;$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 则

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)+Q\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{i=0}^{n}2^{1-n}a_i=1.$$

若 $n\geq 2$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n}2^{1-n}a_i<\sum\limits_{i=0}^{n}a_i+2a_0$, 矛盾!

故 $n\leq 1$, 且 $a_1+2a_0=1$. 经检验显然成立.

因此满足题意的所有 $P(x)$ 为 $P(x)=cx^2+\frac{1-c}{2}$, $c\in[0,1]$. □

评析 从非负系数角度考虑发现 $P(x)$ 仅有偶次项, 之后难度不大.

3. 已知存在一个由非零实数组成的 2018×2018 数表满足: 数表中任意一个数等于其所在行和列其余 4034 个数的和的 k 分之一, 求整数 k 的所有可能值.

解 设第 i 行第 j 列上的非零实数为 a_{ij}, 第 i 行所有实数和为 S_i, 第 j 列所有实数和为 T_j, $A=\sum\limits_{i,j=1}^{2018}a_{ij}$, $1\leq i,j\leq 2018$. 则

$$S_i=\sum_{j=1}^{2018}a_{ij},\ T_j=\sum_{i=1}^{2018}a_{ij},\ A=\sum_{i=1}^{2018}S_i=\sum_{j=1}^{2018}T_j,$$

由题意, 对于某个 a_{ij}, $1\leq i,j\leq 2018$ 有

$$a_{ij}=\frac{1}{k}\left(\sum_{\substack{1\leq r\leq 2018\\ r\neq i}}a_{rj}+\sum_{\substack{1\leq s\leq 2018\\ s\neq j}}a_{is}\right)=\frac{1}{k}\left(S_i+T_j-2a_{ij}\right),$$

即

$$(k+2)a_{ij}=S_i+T_j.$$

所以

$$\begin{aligned}(k+2)A=(k+2)\sum_{i,j=1}^{2018}a_{ij}&=\sum_{i,j=1}^{2018}(S_i+T_j)\\&=2018\left(\sum_{i=1}^{2018}S_i+\sum_{j=1}^{2018}T_j\right)=4036A.\end{aligned}$$

若 $A\neq 0$, 则 $k=4034$. 将所有方格均填 1 可知 $k=4034$ 成立.

若 $A=0$, 则

$$(k+2)S_i=(k+2)\sum_{j=1}^{2018}a_{ij}=\sum_{j=1}^{2018}(S_i+T_j)=2018S_i+A=2018S_i.$$

即 $(k-2016)S_i=0$. 同理可知 $(k-2016)T_j=0$.

若存在 $i\in\{1,2,\cdots,2018\}$, $S_i\neq 0$ 或 $T_j\neq 0$, 则 $k=2016$. 将前 1009 行所有方格填 1, 其余方格填 -1 可知 $k=2016$ 成立.

否则 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{2018} = T_1 = T_2 = \cdots = T_{2018} = 0$. 又

$$(k+2)a_{ij} = S_i + T_j = 0,$$

故 $k = -2$. 当 $k = -2$ 时, 将方格表中所有方格按照国际象棋盘的方式放入 $1, -1$ (即将 $1, -1$ 间隔着放入方格表中, 使得有公共边的两相邻方格内的数不同), 故 $k = -2$ 成立!

综上所述, $k = 4034,\ -2,\ 2016$. □

评析 难度不大且中规中矩的组合题. 考虑 S_i, T_j 的性质是自然的, 唯一要注意的是需要细致的考虑避免漏解.

4. $P(x)$ 是一个非负整系数非零多项式. 已知存在正整数 a, 使得数列 $a_1 = a,\ a_{n+1} = P(a_n)$ 满足: 集合 $A = \big\{p \mid p \text{ 为某项 } a_n \text{ 的素因数}\big\}$ 为有限集, 求所有满足条件的 $P(x)$.

解 考虑满足题意的 $P(x)$, 则存在正整数 a 使得集合 A 为有限集. 设 $A = \{p_1, p_2, \cdots, p_t\}$, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 为互不相同的素数.

显然 $P(x)$ 存在最小非零项, 设这一项为 cx^α ($c, \alpha \in \mathbb{N},\ c \neq 0$).

若 $\alpha = 0$, 令

$$P^{(0)}(x) = x,\ P^{(n)}(x) = P(P^{(n-1)}(x))\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

由 $P(a_n) \equiv c \pmod{a_n}$ 及数学归纳法易知 $P^{(k)}(a_n) \equiv P^{(k-1)}(c) \pmod{a_n}$. 即对任意的正整数 n, k 均有

$$a_{n+k} \equiv P^{(k-1)}(c) \pmod{a_n}.$$

则 $(a_{n+k}, a_n) \leq P^{(k-1)}(c)$ 为仅依赖于 k 的常数.

当 $P(x) = c\ (x \in \mathbb{R})$ 时显然符合题意. 否则, 由于 $P(x)$ 为非负整系数多项式, 则 $P(x) > x\ (x \geq 1)$. 故

$$a_{n+1} \geq a_n + 1,\ P^{(0)}(c) < P^{(1)}(c) < \cdots < P^{(t-1)}(c).$$

取正整数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 使得 $p_i^{\alpha_i} > P^{(t-1)}(c),\ i = 1, 2, \cdots, t$. 令 $T = \prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$.

由于 $a_{n+1} \geq a_n + 1\ (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\{a_n\}$ 为严格递增正整数序列. 因此存在正整数 M, 使得 $a_M > T$.

考虑下面 t 个数 $a_M, a_{M+1}, \cdots, a_{M+t}$, 则有 $a_{M+t} > a_{M+t-1} > \cdots > a_M > T$. 而由 A 的定义可知: $a_M, a_{M+1}, \cdots, a_{M+t}$ 均可表示为 $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_t^{\gamma_t}$ 的形式. 故存在 $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$ 使得 $p_j^{\alpha_j} \mid a_M$, 否则 $a_M \leq \prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i - 1} < T$, 矛盾!

同样对于 $a_{M+1},\cdots,a_{M+t}$ 有上述结论.

因此, 由抽屉原理, 存在 $1\le j\le t,\ 0\le k<l\le t$ 使得 $p_j^{\alpha_j}\mid a_{M+k}$ 且 $p_j^{\alpha_j}\mid a_{M+l}$. 所以有

$$p_j^{\alpha_j}\le(a_{M+k},a_{M+l})\le P^{(l-k-1)}(c)\le P^{(t-1)}(c)<p_j^{\alpha_j}.$$

矛盾!

若 $\alpha\ge1$, 则有 $a_n^\alpha\mid a_{n+1}$. 令

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n^\alpha}\ (n\in\mathbb{N}^+),$$

则 $\{b_n\}$ 仍为整数数列.

设 $B=\big\{p\mid p\text{ 为某项 }b_n\text{ 的素因数}\big\}$. 显然 $B\subseteq A$, 故 B 亦为有限集.

设 $B=\{q_1,q_2,\cdots,q_s\}$, 其中 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 为互不相同的素数.

当 $P(x)=cx^\alpha$ 时, 显然满足题意. 否则有 $b_{n+1}\ge b_n+1\ (n\in\mathbb{N}^+)$. 由于 $a_n\mid a_{n+1}\ (n\in\mathbb{N}^+)$, 又注意到对于 $k\in\mathbb{N}^+$, 有

$$\frac{P(a_{n+k})}{a_{n+k}^\alpha}\equiv c\ (\mathrm{mod}\ a_{n+k}),$$

则 $b_{n+k}\equiv c\ (\mathrm{mod}\ a_{n+1})$, 所以 $b_{n+k}\equiv c\ (\mathrm{mod}\ b_n)$, 故 $(b_{n+k},b_n)\le c$.

取正整数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$, 使得 $q_i^{\beta_i}>c,\ i=1,2,\cdots,s$. 令 $S=\prod\limits_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}$.

再取正整数 N, 使得 $b_N>S$.

同理, 由抽屉原理知, 存在 $1\le j\le s,\ 0\le k<l\le s$, 使得 $q_j^{\beta_j}\mid b_{N+k}$ 且 $q_j^{\beta_j}\mid b_{N+l}$. 所以

$$q_j^{\beta_j}\le(b_{N+k},b_{N+l})\le c<q_j^{\beta_j},$$

矛盾!

综上所述, $P(x)=cx^\alpha\ (c\in\mathbb{N}^+,\alpha\in\mathbb{N})$. □

评析 本题具有一定的难度与区分度. 但这是一个很经典的题型, 即素因子个数有限无限问题. 一般而言, 我们考虑假设某个整数系列 $\{a_n\}$ 可被有限个素数幂的乘积表示, 然后利用条件, 找到一个不依赖于下标 n 的常数作为界限, 那么当 a_n 有某些条件时即可导出矛盾. 寻找常熟常见的手法就有取某两项的最大公约数. 但本题难点在于它存在这样一个陷阱: 我们考虑到 $P(x)$ 是整系数多项式, 因此具有性质: $x-y\mid P(x)-P(y)\ (x,y\in\mathbb{Z})$, 希望利用这一性质找到所需的常数, 然而这样的处理得到的是 $\{a_n\}$ 的差分形式, 与 $\{a_n\}$ 本身性质有所偏离, 从而做起来特别困难. 另一个难点在于, 怎样将 $\alpha\ge1$ 的情形划归到 $\alpha=0$ 的证明, 需要注意这里考虑用 $\frac{P(x)}{x^\alpha}$ 代替 $P(x)$ 是不正确的.

二、 清华测试试题

1. 设正实数 $a_1, a_2, \cdots$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n \le n^2, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 求证: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{4}\log_2 n.$$

证明 先证:

$$\sum_{i=2}^{2^m}\frac{1}{a_i}>\frac{m}{4}. \tag{1}$$

对非负整数 k, 由柯西不等式得

$$\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i\right)\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i}\right)\ge 2^{2k}.$$

则

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i}\ge\frac{2^{2k}}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i}>\frac{2^{2k}}{\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}} a_i}\ge\frac{2^{2k}}{2^{2k+2}}=\frac{1}{4}.$$

故

$$\sum_{i=2}^{2^m}\frac{1}{a_i}=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i}\right)>\frac{m}{4}.$$

(1) 式得证.

在 (1) 式中取 $m=\lfloor\log_2 n\rfloor$, 得

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}>\frac{1}{4}\lfloor\log_2 n\rfloor.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>1+\frac{1}{4}\lfloor\log_2 n\rfloor>\frac{1}{4}\log_2 n.$$

命题得证. □

另证 1 不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots$. 事实上, 设 $a_{i_1}\le a_{i_2}\le\cdots\le a_{i_n}$, 则显然对于任意正整数 n,

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}\le\sum_{i=1}^{n}a_i\le n^2 \quad 且 \quad \frac{1}{a_{i_1}}+\frac{1}{a_{i_2}}+\frac{1}{a_{i_n}}\ge\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}.$$

令

$$S_m=\sum_{i=1}^{m}(2i-1-a_i)=m^2-\sum_{i=1}^{m}a_m\ge 0,\ x_k=\frac{1}{a_k(2k-1)}>0.$$

由于 $(2i-1)a_i<(2i+1)a_{i+1}, i\in\mathbb{N}^+$, 故 $x_i>x_{i+1}, i\in\mathbb{N}^+$. 则由 Abel 求和公式, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{2i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1-a_i}{a_i\,(2i-1)}=S_nx_n+\sum_{i=1}^{n-1}S_i(x_i-x_{i+1})\geq 0.$$

令

$$f(x)=x-\frac{1}{2}\log_2(x+1),$$

则

$$f(0)=0,\ f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)\ln 4}>0\ (x>0).$$

因此 $f(x)\geq 0\ (x\geq 0)$.

令 $x=\frac{1}{i}, i\in\mathbb{N}^+$, 则有

$$\frac{1}{i}\geq\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{i+1}{i}\right).$$

所以有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\geq\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\log_2\left(\frac{i+1}{i}\right)\\=\frac{1}{4}\log_2(n+1)>\frac{1}{4}\log_2 n.\end{aligned}$$

证毕! □

另证 2 设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_n,\ n\in\mathbb{N}^+$, 则 $S_n=a_n+S_{n-1}\ (n\geq 2)$. 由柯西不等式, 则有

$$\frac{(n+1)^2}{S_n}\leq\frac{4}{a_n}+\frac{(n-1)^2}{S_{n-1}}\quad(n\geq 2).$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{S_i}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(i+1)^2}{S_i}-\frac{i^2}{S_i}\right)\\&\leq\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{4}{a_i}+\frac{(i-1)^2}{S_{i-1}}+\frac{i^2}{S_i}\right)+\frac{4}{a_1}-\frac{1}{S_1}\\&<4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{4S_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}>\frac{1}{4}\log_2 n.$$

证毕! □

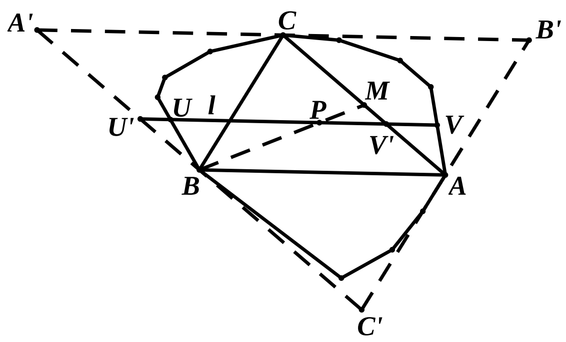
评析 第一种证法类似于调和级数发散的证明, 把数列分成若干段证明每

一段的和大于某个常数, 这里用柯西不等式分段放缩可以证得每一段大于 $\frac{1}{4}$. 第二种证明类似于优超不等式的证法, 先把数列按从小到大顺序重排 , 然后注意到递增关系与分段和的符号, 利用 Abel 变换公式就可以证得结论. 当然, 当然, 也可以直接由优超或 Karamata 不等式直接得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{2i-1}\right)\geq 0$. 不过由于这里放缩不需要取等, 所以用柯西不等式裂项也可以证明, 注意不等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i+1}{4S_i}$ 只需要条件 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

2. 给定凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$. 证明: 存在凸多边形内部一点 P, 使得对任意过点 P 的直线 l, l 与凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界交于 U,V 两点, 且满足

$$\frac{1}{2}\leq\frac{PU}{PV}\leq 2.$$

证明 如下图所示, 考虑 C_n^3 个三角形 $\triangle A_iA_jA_k$ $(1\leq i<j<k\leq n)$ 中面积最大的三角形 (如果有多个任选一个), 不妨设这个三角形为 $\triangle ABC$. 过点 A,B,C 分别作对边的平行线, 交于点 A',B',C', 则凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 被 $\triangle A'B'C'$ 覆盖, 否则存在面积更大的三角形, 与最大性矛盾!



取点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 下面说明点 P 满足题意.

任取过 P 的直线 l , 设 l 与凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界交于 U,V 两点. 如图所示, 不妨设 U 在 $\triangle A'BC$ 中, V 在 $\triangle AB'C$ 中且 $PU\geq PV$, 设 l 与 $AC,A'C'$ 分别交于 V',U', 则 $PU'\geq PU$, $PV'\leq PV$.

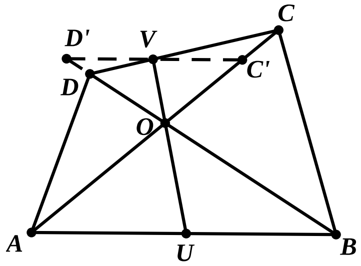
设 M 为 AC 的中点, 则 M,P,B 三点共线且 $\frac{PM}{PB}=\frac{1}{2}$. 由于 $AC\parallel A'C'$, 则

$$1\leq\frac{PU}{PV}\leq\frac{PU'}{PV'}=\frac{PB}{PM}=2.\qquad\square$$

另证 先证如下引理.

引理 设凸四边形 $ABCD$ 两条对角线 AC,BD 交于点 O. 点 U,V 分别在线段 AB 和线段 CD 上, 则

$$\min\left\{\frac{OA}{OC},\frac{OB}{OD}\right\}\leq\frac{OU}{OV}\leq\max\left\{\frac{OA}{OC},\frac{OB}{OD}\right\}.$$



引理的证明 过 V 做 AB 的平行线交 OC 于 C', 交 OD 于 D'. 则 C' 在线段 OC 上, D' 在线段 OD 外; 或者 C' 在线段 OC 外, D' 在线段 OD 上.

不妨设 C' 在线段 OC 上, D' 在线段 OD 外. 则

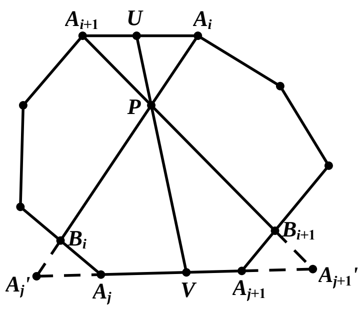
$$\frac{OU}{OV}=\frac{OA}{OC'}=\frac{OB}{OD'},\ OC'\le OC,\ OD'\ge OD.$$

于是

$$\frac{OA}{OC}\le\frac{OU}{OV}\le\frac{OB}{OD}.$$

引理获证.

回到原题. 先说明如果凸多边形内部存在一点 P, 使得对凸多边形任一顶点 A, 直线 AP 交凸多边形于另一点 B, 都有 $\frac{PA}{PB}\le 2$, 则这个点 P 也满足题目要求.



设过 P 的直线交 A_iA_{i+1} 于 U, 交 A_jA_{j+1} 于 V.

设直线 PA_i 和 PA_{i+1} 分别交直线 A_jA_{j+1} 于 A_j' 和 A_{j+1}', 则由引理知,

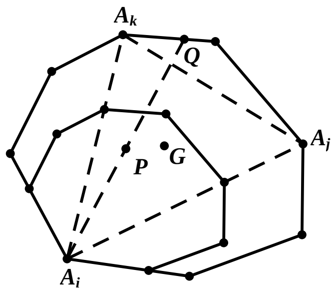
$$\frac{PU}{PV}\le\max\left\{\frac{PA_{i+1}}{PA_{j+1}'},\frac{PA_i}{PA_j'}\right\}\le\max\left\{\frac{PA_{i+1}}{PB_{i+1}},\frac{PA_i}{PB_i}\right\}\le 2.$$

同理, $\frac{PV}{PU}\le 2$. 故

$$\frac{1}{2}\le\frac{PU}{PV}\le 2.$$

下面证明存在一个点 P 满足上述条件.

作凸多边形形内的凸集 P_i, 其边界围成的凸 n 多边形与 $A_1A_2\cdots A_n$ 关于点 A_i 按照 $\frac{2}{3}$ 的比例位似, $i=1,2,\cdots,n$. 因此, 若点 P 在 P_i 中, 设 A_iP 交凸多边形于另一点 Q, 则 $\frac{PA_i}{PQ}\le 2$.



故我们只需证明 $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \neq \emptyset$.

对任意 $1 \le i < j < k \le n$, 设 $\triangle A_iA_jA_k$ 的重心为点 G, 则 $G \in P_i \cap P_j \cap P_k$.

事实上, 取点 J, k 分别在线段 A_iA_j, A_iA_k 上且满足 $\frac{A_iJ}{A_jJ} = \frac{A_iK}{A_kK} = 2$. 则由凸集 P_i 的定义可知 $J, K \in P_i$. 又显然 J, K, G 三点共线, 故 $G \in P_i$. 同理则有 $G \in P_i \cap P_j \cap P_k$, 故 $P_i \cap P_j \cap P_k \neq \emptyset$.

由海莱定理, $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \neq \emptyset$, 故本题得证. □

评析 两种做法考虑的方式不同. 前一种希望直接构造, 由于题目要求是一个范围, 从而希望利用直径, 最大三角形等方式控制其范围, 然后去寻找特殊点. 而 $2:1$ 的比例容易联想到重心, 故从质心或者某个特殊三角形的重心出发去构造, 或许小情况对题目的构造有所启发; 另一种方式希望证明其存在性. 因而选取凸多边形上一点, 找到由这个点得到的满足条件的范围, 然后希望证明存在一个点在每个范围中, 这就让人联想到了海莱定理. 但为了避免运用无穷多个凸集的海莱定理 (这个定理证明用到了数学分析中的有限覆盖定理), 因而考虑转化为对顶点产生的凸集运用有限凸集的海莱定理.

3. 设 n 为大于 100 的正整数. 对任意不超过 n 的素数 p, 记 α_p 为 $n!$ 中 p 的次数, 证明: 可以对每个不超过 n 的素数 p, 指定一个不超过 n 的互不相同的正整数 β_p, 使得 $1 + \alpha_p \mid \beta_p$.

证明 由勒让德公式

$$\alpha_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \frac{n - S_p(n)}{p-1},$$

其中 $S_p(n)$ 表示正整数 n 在 p 进制表示下的数码和.

考虑不超过 n 的素数从小到大排列为 $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_t$. 下面逐步构造 $\beta_{p_1}, \beta_{p_2}, \cdots, \beta_{p_t}$ 使得 $1 + \alpha_p \mid \beta_p$.

令 $\beta_{p_1} = \beta_2 = \alpha_2 + 1$, $\beta_{p_2} = \beta_3 = \alpha_3 + 1$. 由于

$$\alpha_2 = n - S_2(n) \ge n - 1 - \log_2 n > \frac{n}{2} > \frac{n - S_3(n)}{2} = \alpha_3 \ (n > 100),$$

故 $\beta_2 \neq \beta_3$ ($\beta_2 > \beta_3$). 再考虑 β_5, 注意到

$$3(\alpha_5+1) = \frac{3}{4}(n+4-S_5(n)) < \frac{3}{4}(n+4) \le n \ (n > 100),$$

故存在 $s \in \{1,2,3\}$, $s(\alpha_5+1) \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{\beta_2,\beta_3\}$. 令 $\beta_5 = s(\alpha_5+1)$. 进一步考虑构造 β_7. 因为

$$4(\alpha_7+1) = \frac{2}{3}(n+6-S_7(n)) < \frac{2}{3}(n+6) \le n \ (n > 100),$$

故存在 $r \in \{1,2,3,4\}$, $r(\alpha_7+1) \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{\beta_2,\beta_3,\beta_5\}$. 令 $\beta_7 = r(\alpha_7+1)$. 故上述构造得到的 $\beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_7$ 符合题意.

下面进一步构造 $\beta_{p_5}, \cdots, \beta_{p_t}$. 对于 $5 \le k \le t$, 假设已经构造好了 $\beta_{p_1}, \beta_{p_2}, \cdots, \beta_{p_{k-1}}$, 考虑到当 $k \ge 5$ 时, 有 $p_k \ge 2k+1$. 由此可知

$$\begin{aligned} k(\alpha_{p_k}+1) \le \left(\frac{p_k-1}{2}\right)(\alpha_{p_k}+1) &= \frac{1}{2}(n+p_k-1-S_{p_k}(n)) \\ &< \frac{1}{2}(n+p_k) \le n. \end{aligned}$$

故存在 $q \in \{1,2,\cdots,k\}$, $q(\alpha_{p_k}+1) \in \{1,2,\cdots,n\} \setminus \left\{\beta_{p_1}, \beta_{p_2}, \cdots, \beta_{p_{k-1}}\right\}$.

由此构造得到的 $\beta_{p_1}, \beta_{p_2}, \cdots, \beta_{p_t}$ 显然符合题意, 证毕! □

评析 考虑到对于 $1 \le k \le t$,, 均有 $\beta_{p_k} = q(\alpha_{p_k}+1)$, 我们需要 β 不大于 n, 因此 q 的取值是有限的, 一次性全部构造出来很有可能存在素数 $1 \le p < p' \le n$, $\beta_p = \beta_{p'}$, 故我们不急着一步到位, 一步步地构造, 因此自然地想从 β_{p_2} 开始构造. 考虑将 q 的取值估计出来, 接下来将小情况去掉以后可以很轻松地证明存在满足题意的 q. 值得一提的是, 我们由此题可以立刻推得如下题目的解答: $n \in \mathbb{N}$, $n > 100$, 则 $\tau(n!) \mid n!$.

4. 设 $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $a \le b \le n-a$, $X = \{1,2,\cdots,n\}$, 给定 A_0 为 X 的 a 元子集.

(1) 设 $A \subseteq X$, $|A| = a$, $|A \cap A_0| = i$, 对 $0 \le j \le a$, 求满足以下条件的集合 B 的个数:

$$A \subseteq B \subseteq X,\ |B| = b,\ |B \cap A_0| = j.$$

(2) 证明: 可以给每个 X 的 b 元子集 B 赋上实数 $f(B)$, 使得对 $A \subseteq X$, $|A| = a$, 均满足:

$$\sum_{\substack{A \subseteq B \subseteq X, \\ |B| = b}} f(B) = \begin{cases} 0, & A \neq A_0 \\ 1, & A = A_0 \end{cases}.$$

解 (1) 满足条件的集合 B 的个数为 $\mathrm{C}_{a-i}^{j-i}\mathrm{C}_{n+i-2a}^{b-a+i-j}$.

令 $S=B\setminus A$, 则有: $S=(S\cap A_0)\cup(S\setminus A_0)$. 注意到

$$|S\cap A_0|=j-i;$$

$$S\cap A_0\subseteq A_0\setminus A,\ |A_0\setminus A|=a-i;$$

$$|S\setminus A_0|=|B|-|A_0\cap B|-|A|+|A\cap A_0|=b-j-a+i;$$

$$S\setminus A_0\subseteq X\setminus(A\cup A_0),\quad |X\setminus(A\cup A_0)|=n+i-2a.$$

故 S 的选取共有 $\mathrm{C}_{a-i}^{j-i}\mathrm{C}_{n+i-2a}^{b-a+i-j}$ 种, 因此有 $\mathrm{C}_{a-i}^{j-i}\mathrm{C}_{n+i-2a}^{b-a+i-j}$ 个满足条件的 B.

(2) 对于整数 $j\in[i,a]$, 将满足 $A\subseteq B\subseteq X,\ |B|=b,\ |A_0\cap B|=j$ 的所有集合 B 赋值 x_j, 下面说明存在数组 $(x_0,x_1,\cdots,x_a)\in\mathbb{R}^{a+1}$ 使得

$$\sum_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ |B|=b}}f(B)=\begin{cases}0, & A\neq A_0\\ 1, & A=A_0\end{cases}.$$

对于集合 $A\subseteq X,\ |A|=a,\ |A\cap A_0|=i$, 由 (1) 及 x_j 的定义可知

$$\sum_{A\subseteq B\subseteq X,|B|=b}f(B)=\sum_{j=i}^{a}\mathrm{C}_{a-i}^{j-i}\mathrm{C}_{n+i-2a}^{b-a+i-j}x_j\quad(i=0,1,\cdots,a).$$

设 $g(i)=\sum\limits_{j=i}^{a}\mathrm{C}_{a-i}^{j-i}\mathrm{C}_{n+i-2a}^{b-a+i-j}x_j$. 令 $g(a)=1$, 故 $\mathrm{C}_{n-a}^{b-a}x_a=1$, 则 $x_a=\frac{1}{\mathrm{C}_{n-a}^{b-a}}$.

进一步地, 令 $g(a-1)=\cdots=g(0)=0$. 由于 $g(a-1)=0,\ x_a=\frac{1}{\mathrm{C}_{n-a}^{b-a}}$, 而 $g(a-1)$ 中 x_{a-1} 的系数为 $\mathrm{C}_{n-a-1}^{b-a}\neq0$. 由此可解得 x_{a-1}, 依此类推可以依次解得实数 $x_{a-1},\cdots,x_0$. 至此, 我们将 X 的所有 b 元子集赋上了某个实数且满足

$$\sum_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ |B|=b}}f(B)=g\left(|A\cap A_0|\right).$$

由于 $g(a)=1,\ g(a-1)=\cdots=g(0)=0$. 故

$$\sum_{\substack{A\subseteq B\subseteq X,\\ |B|=b}}f(B)=\begin{cases}0, & A\neq A_0\\ 1, & A=A_0\end{cases}.$$

证毕! □

评析 此题难点在于看上去很复杂, 但由于第一问提示性是明显的, 极大降低了难度, 故第二问考虑将满足 $A\subseteq B\subseteq X$, $\mid B\mid=b$, $\mid A_0\cap B\mid=j$ 的所有集合 B 赋值 x_j 是自然的. 而说明 x_j 有解只需要将式子一个一个解出来, 与上一题思想相同, 不必急于一次性解出所有的量, 而是通过分步骤依次解决从而逐渐得到我们想要的结果.

III. 总 评

总的来说, 考试难度基本上和联赛相近, 也具有较好的区分度, 但联赛和两次测试题型及侧重点有所差异. 北大的测试更倾向于数学竞赛的风格, 而清华的题目高等数学的意味有点重. 尽管都是几何代数组合数论四个板块各一题, 但也可以发现, 北大的测试偏重于多项式板块, 其中多项式在代数和数论中的题型均有考察. 另外, 北大的四个题均为解答题, 这也考察学生的探索能力和细致程度(例如北大的第三题不少人存在漏解的情况). 而清华对于几何的考察, 侧重于组合几何板块, 而并非我们所常见的几何题, 另外有趣的是, 与北大相反, 清华考察的四个题均为证明题, 且其中有三个题是证明存在性问题, 并且均可直接构造, 考察同学的思维创造能力. 总而言之, 两场考试都具有对能力的全面考察，做出三道题就具有一定的竞争力.