对一道 IMO 预选题的探究

卢圣

(广西钦州市新兴街 30 号祥和景都 2 栋 2 单元, 535000)

第 52 届 IMO 预选题中有如下一道平面几何题:

如图 1, $\triangle ABC$ 中, G 为重心, E, F 为 CA, AB 的中点, 圆 Γ 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 T (异于 A), $AD \perp BC$ 于 D. 证明: T, D, G 三点共线.

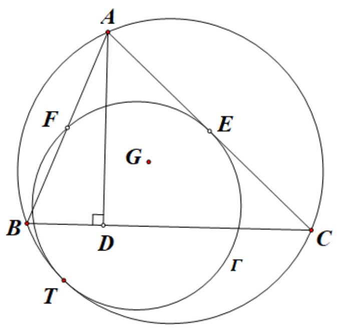

图 1

该题条件中的圆 Γ 过三角形两边的中点且与外接圆相切, 结构新颖、饶有趣味. 笔者通过对该题的研究, 得到圆 Γ 的一些基本性质, 并得到该圆与三角形垂心的等截共轭点的等角共轭点与欧拉线相关的性质. 现将有关结论整理成文, 供读者参考.

注 1 如图 2, P, Q 两点满足

$$\angle BAP = \angle QAC,\ \angle PBA = \angle CBQ,\ \angle BCP = \angle QCA,$$

则称 P, Q 为关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

注 2 如图 3, 过 $\triangle ABC$ 的顶点作交于 P 的三条直线分别交对边于 D, E, F, X, Y, Z 为 D, E, F 关于 BC, CA, AB 中点的对称点, 则 AX, BY, CZ 三点共线, 设该点为 Q, 则称 P, Q 关于 $\triangle ABC$ 的等截共轭点.

收稿日期: **2018-07-22.**

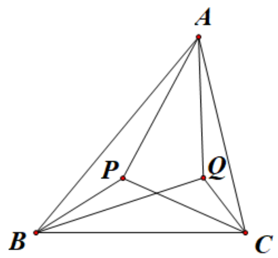

图 2

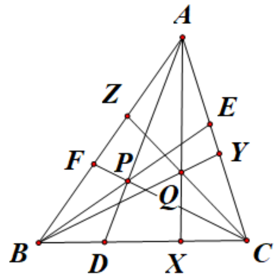

图 3

为便于进一步的探索, 先看文献 [1] 对该题的证明.

证明 若 $AB = AC$, 则题中图形关于直线 AD 对称, 结论是显然的.

若 $AB \neq AC$, 如图 4, 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, M 为 BC 中点, 延长 MO 与 EF 交于 J. 由重心性质知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MEF$ 位似, G 为位似中心.

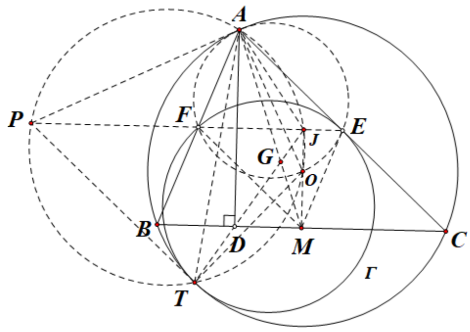

图 4

易知 $EF \parallel BC$, $OM \perp BC$, 所以 $MJ \perp EF$ 于 J.

所以 D, J 为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MEF$ 的位似对应点, 所以 D, G, J 共线. 易知 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 位似, A 为位似中心, 所以 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切于 A.

由根心定理知过 A, T 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线与 EF 共点, 设为 P. 所以 A, P, T, O, J 五点共圆于 OP 为直径的圆. 易知 EF 垂直平分 AD. 所以 $\angle PJD = \angle PJA = \angle PTA = \angle PAT = \angle PJT$. 故 J, D, T 三点共线, 所以 J, G, D, T 共线. □

至此题目证明完成, 但是还有一些疑问. 题设中的圆 Γ 在一般的三角形中都存在吗? 还是命题人仅仅在特殊的三角形中画出的特殊图形而已? 因此, 在进一步探索之前首先需要解决题设中圆 Γ 存在性的问题. 对于上述疑问, 答案是肯定的.

下面证明一般的三角形中题设中的圆 Γ 一定存在. 证明仍旧参照图 4, 但是

条件表述作出下列调整:

如图 4, $\triangle ABC$ 三边互不相等, E, F 分别为 CA, AB 的中点, 过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线与直线 EF 交于 P, 过 P 作 $\triangle ABC$ 外接圆的另一条切线, 切点为 T, 则 $\triangle TEF$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 外接圆相切于点 T.

证明 易知 EF 为边 BC 所对的中位线, 所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AFE$ 位似, 且 A 为位似中心, 所以 $\triangle ABC$ 及 $\triangle AFE$ 的外接圆相切于点 A, 所以 PA 为 $\triangle AEF$ 的外接圆的切线, 故有 $PT^2 = PA^2 = PE \cdot PF$, 即 $\frac{PT}{PE} = \frac{PF}{PT}$. 所以有 $\triangle PET \sim \triangle PTF$, 故 $\angle PTF = \angle PET$.

因此 PT 与 $\triangle TEF$ 的外接圆相切, 即 PT 为 $\triangle ABC$ 及 $\triangle TEF$ 的外接圆的公切线. 所以 $\triangle ABC$ 及 $\triangle TEF$ 的外接圆相切. □

上述证明肯定地回答了题设中圆 Γ 存在性, 也给出了具体的作图方法. 下面开始探索圆 Γ 的具体性质. 先约定, 下文讨论的 $\triangle ABC$ 三边互不相等, 文中将不再一一指出.

性质 1 如图 5, $\triangle ABC$ 中, G 为重心, E, F 为 CA, AB 的中点, 圆 Γ 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 T (异于 A), $AD \perp BC$ 于 D, 过 A 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 L, 则 T, D, G, L 四点共线.

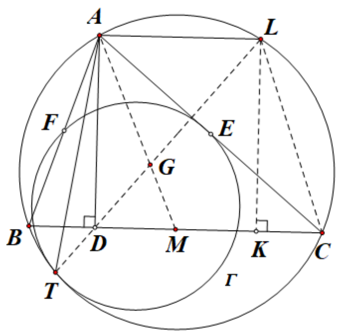

图 5

证明 如图 5, 设 BC 中点为 M, $LK \perp BC$ 于 K. 易知四边形 $ABCL$ 为等腰梯形, 四边形 $ADKL$ 为矩形. 所以 $BD = CK$. 故 M 为 DK 中点, 所以有 $\frac{DM}{LA} = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2}$.

从而 $\triangle GDM$ 与 $\triangle GLA$ 位似, G 为位似中心, 所以 D, G, L 共线. 由 T, D, G 共线, 所以 T, D, G, L 四点共线. □

性质 2 如图 6, $\triangle ABC$ 中, E, F 为 CA, AB 的中点, 圆 Γ 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 T (异于 A), 则 AT 关于 $\triangle ABC$ 外接圆的极点在 $\triangle ABC$ 外接圆与九点圆的根轴上.

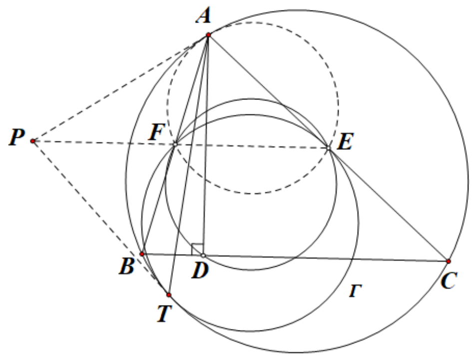

图 6

证明 如图 6, 易知 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 位似, A 为位似中心. 所以 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切与 A.

由根心定理知过 A, T 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线与 EF 共点, 设为 P, 故 P 为 AT 关于 $\triangle ABC$ 外接圆的极点. 易知 $PT^2 = PA^2 = PE \cdot PF$. 所以 P 对 $\triangle ABC$ 外接圆及九点圆的幂相等. 所以 P 在 $\triangle ABC$ 外接圆与九点圆的根轴上. $\square$

性质 3 如图 7, $\triangle ABC$ 中, E, F 为 CA, AB 的中点,圆 Γ 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于 T (异于 A), $AD \perp BC$ 于 D, 则

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB \cdot BD}{AC \cdot CD}.$$

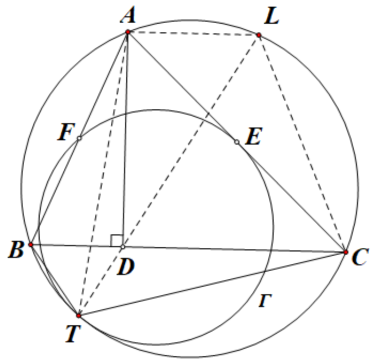

图 7

证明 如图 7, 过 A 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 L, 易知 $AB = LC$.

由性质 1 知 T, D, L 共线, 所以 $\angle DTC = \angle LTC = \angle BTA$. 故 $\triangle ABT \sim \triangle CDT$. 从而

$$\frac{TC}{TA} = \frac{CD}{AB}. \tag{1}$$

由 $\angle ATC = \angle ABC = \angle BCL = \angle BTL = \angle BTD$, 所以 $\triangle TAC \sim \triangle TBD$. 从而有

$$\frac{TB}{TA} = \frac{BD}{AC}. \tag{2}$$

由 (1), (2) 式得

$$\frac{TB}{TC}=\frac{AB\cdot BD}{AC\cdot CD}.$$

证毕! $\square$

性质 4 如图 8, 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 为 CA, CB 的中点, 圆 Γ 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 的外接圆切于 T (异于 A), $AD\perp BC$ 于 D, K 在 BC 上且 $BD=CK$, 则 AT, AK 为 $\angle BAC$ 的一对等角线.

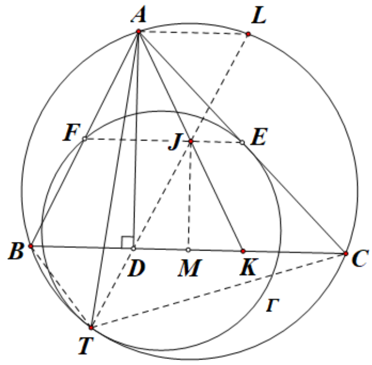

图 8

证明 如图 8, 设 BC 中点为 M, M 在 EF 射影为 J, 过 A 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 L.

由前述证明知 T, D, J, L 共线且 $\triangle MEF$ 与 $\triangle ABC$ 位似. 所以 J, D 为 $\triangle MEF$ 与 $\triangle ABC$ 的位似对应点, 所以

$$\frac{EJ}{JF}=\frac{BD}{DC}=\frac{CK}{KB}.$$

易知 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 位似, A 为位似中心, 所以 J, K 为 $\triangle AFE$ 与 $\triangle ABC$ 的位似对应点. 故 A, J, K 共线且 J 为 AK 中点, 所以 $\angle JDC=\angle JKB=\angle AJF$. 因此

$$\angle CDT=180^\circ-\angle JDC=180^\circ-\angle AJF=\angle AJE.$$

由性质 1 知 $\angle DTC=\angle LTC=\angle BCA=\angle JEA$, 所以 $\triangle TCD\sim\triangle EAJ$, 所以

$$\angle BAT=\angle BCT=\angle DCT=\angle JAE=\angle KAC.$$

所以 AT, AK 为 $\angle BAC$ 的一对等角线. $\square$

性质 5 如图 9, 在 $\triangle ABC$ 中, E,F 为 CA, AB 的中点, 圆 Γ 过 E,F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 T (异于 A), 则

$$\frac{TB\cdot TC}{TA^2}=|\cos B\cos C|.$$

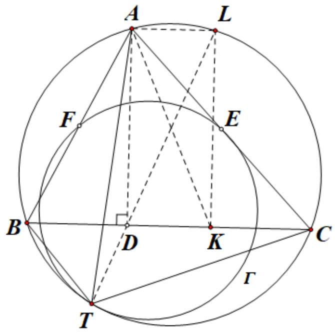

图 9

证明 在此仅证明锐角三角形的情形. 钝角三角形的情形完全类似.

如图 9, 作 $AD \perp BC$ 于 D, 过 A 作 BC 的平行线交 $\triangle ABC$ 外接圆于 L, 作 $LK \perp BC$ 于 K. 由前述证明知 T, D, L 共线, 四边形 $ADKL$ 为矩形, $BD = CK$. 所以 $AK = DL$.

由性质 4 知 $\angle BAT = \angle KAC$. 所以 $\triangle BAT \sim \triangle KAC$, 故

$$\frac{BA}{TA} = \frac{AK}{AC} = \frac{DL}{AC},\ AB \cdot AC = AT \cdot DL \tag{1}$$

由性质 3 知 $\triangle ABT \sim \triangle CDT$, 有 $\frac{TC}{TA} = \frac{TD}{TB}$, 则

$$TB \cdot TC = TD \cdot TA. \tag{2}$$

由 (1), (2) 两式得

$$AB \cdot AC \cdot TB \cdot TC = TA^2 \cdot TD \cdot DL = TA^2 \cdot BD \cdot DC.$$

所以

$$\frac{TB \cdot TC}{TA^2} = \frac{BD \cdot DC}{AB \cdot AC} = \cos B \cos C. \qquad \square$$

性质 6 如图 10, $\triangle ABC$ 中, M, E, F 为 BC, CA, AB 的中点, 圆 Γ_2 过 M, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 Y (异于 B), 圆 Γ_3 过 M, E 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 Z (异于 C), BP, CQ 为 CA, AB 所对的高, 则 Y, P, Q, Z 四点共圆.

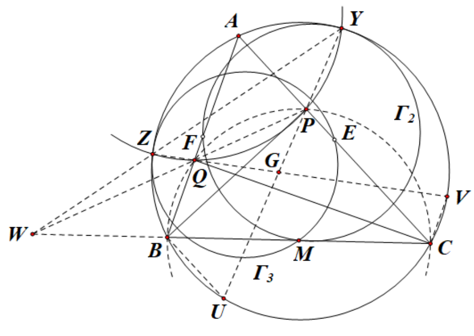

图 10

证明 如图 10, 设 ABC 的重心为 G, 过 B 作 AC 的平行线, 过 C 作 AB 的平行线分别与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 U, V.

由性质 1 知 U, G, P, Y 及 V, G, Q, Z 分别四点共线, 且 $UG = 2PG$, $VG = 2QG$. 易知 $GY \cdot GU = GZ \cdot GV$. 所以

$$GP \cdot GY = \frac{1}{2} GY \cdot GU = \frac{1}{2} GZ \cdot GV = GQ \cdot GZ.$$

所以 Y, P, Q, Z 四点共圆. □

推论 YZ, PQ, BC 三线共点.

证明 易知 B, C, P, Q 四点共圆. 由根心定理知 YZ, PQ, BC 三线共点. □

性质 7 如图 11, $\triangle ABC$ 中, H 为垂心, M, E, F 为 BC, CA, AB 的中点, 圆 Γ_1 过 E, F 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 T (异于 A), 圆 Γ_2 过 M, F 且与 ABC 外接圆切于点 Y (异于 B), 圆 Γ_3 过 M, E 且与 $\triangle ABC$ 外接圆切于点 Z (异于 C), 则 AT, BY, CZ 三线共点, 该点为 H 的等截共轭点的等角共轭点, 且为外接圆与九点圆的根轴关于外接圆的极点.

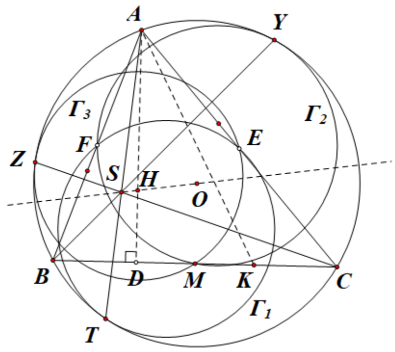

图 11

证明 如图 11, 由性质 2 知 AT 过 $\triangle ABC$ 外接圆与九点圆的根轴关于 $\triangle ABC$ 外接圆的极点, 设为点 S. 同理, BY, CZ 也过点 S. 由于 $\triangle ABC$ 外接圆与九点圆的根轴垂直于 $\triangle ABC$ 的欧拉线. 所以点 S 在 $\triangle ABC$ 欧拉线上.

下面证明 S 为 H 的等截共轭点的等角共轭点. 设 AH 与 BC 交于 D, K 在 BC 上且 $BD = CK$.

由性质 4 知 AT, AK 为 $\triangle BAC$ 的一对等角线. 所以 AT 经过 H 的等截共轭点的等角共轭点. 同理, BY, CZ 也过 H 的等截共轭点的等角共轭点. 所以 S 为 H 的等截共轭点的等角共轭点. □

事实上, 性质 7 可以表述为: 三角形的垂心的等截共轭点的等角共轭点在欧拉线上, 且该点为外接圆与九点圆的根轴关于外接圆的极点.