2018 联赛加试最后一题思路分析

冯跃峰

2018 联赛加试试题的难度相对平稳, 只有最后一题较难. 颇为遗憾的是, 本次考试没有纯粹的组合问题. 从严格意义上讲, 第 3, 4 题都是以数论知识为背景的组合问题, 它们属于组合数论的范畴.

下面是我们对第 4 题解答的思路分析.

题目 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: a_1 是任意正整数, a_{n+1} 是与 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 互质, 且异于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的正整数. 试证: 每个正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

(2018 高中数学联赛加试第 4 题)

【题感】 从目标看, 要“每个正整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现”, 自然想到对正整数进行归纳. 但从条件看, 只给出了数列的定义: $(a_{n+1}, S_n) = 1, a_{n+1}$ 异于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 且 a_{n+1} 最小. 这些都无法建立相继正整数 n 与 $n+1$ 之间的联系, 因而无法对正整数本身进行归纳, 只能对正整数的某种数量属性归纳 (分批归纳, 同一个属性含有多个正整数).

应考察正整数的什么属性呢? 不妨从特例入手, 取一个具体的数列 $\{a_n\}$ 来考察, 从中发现规律.

此外, 注意到 $a_{N+1} + S_N = S_{N+1}$, 结合辗转相除法, 可知 $(a_{n+1}, S_n) = 1$ 有两种等价表示: $(a_{n+1}, S_{n+1}) = 1$, $(S_{n+1}, S_n) = 1$.

【研究特例】 取 $a_1 = 1$, 则易知数列前若干项为: $1, 2, 4, 3, 7, 5, 9, \cdots$, 该序列各项之间似乎没有什么联系, 但这些项却有一个共同点, 你发现了吗?

【发掘规律】 这些数都只含有一个质因数, 为 p^α 形式的数. 它启发我们产生这样的设想: 先证明只含有一个质因数的正整数 p^α 都属于 W, 进而证明含有多个质因数的正整数也属于 W (数列 $\{a_n\}$ 各项组成的集合), 由此想到对正整数的质因数个数进行归纳.

收稿日期: 2018-9-11.

【属性分批归纳】对正整数含有质因数的个数 τ 进行归纳.

当 $\tau=1$ 时, 正整数为 p^{α} 形式. 要证明 $p^{\alpha}\in W$, 需验证 p^{α} 满足如下 2 个条件:

(1) 存在正整数 N, 使 $(p^{\alpha},S_N)=1$;

(2) p^{α} 是满足 (1) 且异于 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的最小正整数. 其中异于 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 是可忽略的, 否则 $p^{\alpha}\in\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$, 当然有 $p^{\alpha}\in W$. 但数列 $\{a_n\}$ 及 p^{α} 都不是具体的数, 难以从正面找到合乎 (1), (2) 的 N. 宜从反面入手.

【反面思考】假定 $p^{\alpha}\notin W$, 我们要导出与数列 $\{a_n\}$ 的递归定义 (1), (2) 相矛盾. 容易发现, 如果 p^{α} 具有这两个性质, 即 $(p^{\alpha},S_N)=1$, 且 $p^{\alpha}<a_{N+1}$, 则与 a_{N+1} 的最小性矛盾 (p^{α} 更小), 由此便找到了导出矛盾的大方向.

【性质分解】显然, 要使 $p^{\alpha}<a_{N+1}$ 是很容易的, 因为不超过 p^{α} 的正整数只有有限个, 数列 $\{a_n\}$ 从某项起都会大于 p^{α}. 不妨设 $p^{\alpha}<a_{N+1}$, 则 $(p^{\alpha},S_N)\neq1$, 即 $p|S_N$. 类似可知, $(p^{\alpha},S_{N+1})\neq1$, $p|S_{N+1}$. 但

$$(S_{N+1},S_N)=(S_{N+1}-S_N,S_N)=(a_{N+1},S_N)=1,$$

矛盾!

所以, $\tau=1$ 时结论成立.

设 $\tau<k$ $(k\geq2)$ 时结论成立, 考察 $\tau=k$ 的情形. 与 $\tau=1$ 时类似, 难以从正面证明相应的正整数属于 W, 宜从反面入手.

【反面思考】假定存在正整数 $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\notin W$, 我们要导出与数列 $\{a_n\}$ 的递归定义 (1), (2) 相矛盾. 容易发现, 如果 x 具有这两个性质, 即 $(x,S_N)=1$, 且 $x<a_{N+1}$, 则与 a_{N+1} 的最小性矛盾 ($x\notin W$ 当然异于 $a_1,a_2,\cdots,a_N$, 但 x 更小), 由此便找到了导出矛盾的大方向.

【性质分解】同样, 可取适当的N，使 $x<a_{N+1}$, 则 $(x,S_N)\neq1$, 即存在 $1\leq i\leq k$, 使 $p_i|S_N$. 类似可知, 对任何 $n\geq N$, 存在 $1\leq i\leq k$, 使得 $p_i|S_n$.

注意到这里的 p_i 有不同取值, 与 n 相关, 从而不能说明所有 S_n $(n>N)$ 有公共质因数 $(n>N)$. 由此想到, 我们需要找到一个公共的 $p=p_i$, 及两个相邻的 S_j,S_{j-1}, 使

$$p|S_j,\ p|S_{j-1}\ (j-1\geq N). \tag{$*$}$$

这当然要利用归纳假设: 正整数 $y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta^2}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$ 属于 W.

【建立联系】由于 y 不含质因数 p_k, 想到我们要找到公共的 $p=p_k$, 这只

需存在 j, 使 $(y,S_j)=1,(y,S_{j-1})=1\ (j-1\geq N)$. 其中 $(y,S_{j-1})=1$ 是很容易的, 因为 $y\in W$, 可设 $y=a_j$, 则由数列定义, $(a_j,S_{j-1})=1$, 即 $(y,S_{j-1})=1$. 但此时未保证 $j-1\geq N$, 需要优化假设.

【优化假设】 为保证 $j-1\geq N$, 只需 $y=a_j$ 异于 $a_1,a_2,\cdots a_N$, 即 $j\neq 1,2,\cdots N$, 从而 $j>N$. 为了使 $(*)$ 成立, 还必须 $x<a_j$, 即 $y>x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.

注意到 β_i 可任意大, 从而 $y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta^2}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$ 可任意大, 于是取 $y>x$ 及 $y=a_j$ 异于 $a_1,a_2,\cdots a_N$ 都是可行的.

对于上述选定的 $y=a_j$, 有 $(a_j,S_{j-1})=1\,(j-1\geq N)$. 进而也有 $(a_j,S_j)=1$. 实际上, $(a_j,S_j)=(a_j,S_j-a_j)=(a_j,S_{j-1})=1$. 这说明 S_j,S_{j-1} 都不含质因数 $p_1p_2,\cdots,p_{k-1}$. 但 $x<a_j$, 且 x 异于 $a_1,a_2,\cdots,a_{j-1}$ (因为 x 不属于 W), 所以 $(x,S_{j-1})\neq 1$ (否则与 a_j 的最小性矛盾, 因为 x 比 a_j 小), 即存在 $1\leq i\leq k$, 使 $p_i|S_{j-1}$.

由于 S_{j-1} 不含质因数 $p_1,p_2,\cdots,p_{k-1}$, 只能是 $p_k|S_{j-1}$.

同样可知, $p_k|S_j$. 但

$$(S_j,S_{j-1})=(S_j-S_{j-1},S_{j-1})=(a_j,S_{j-1})=1,$$

矛盾!

【新写】 设数列 $\{a_n\}$ 各项组成的集合为 W, 我们证明任何正整数都属于 W. 对正整数所含质因数个数 τ 归纳.

当 $\tau=1$ 时, 假定存在 $p^\alpha\notin W$. 因为不超过 p^α 的正整数只有有限个,必存在正整数 $N,N+1$, 使 $p^\alpha<a_{N+1}$, $p^\alpha<a_{N+2}$. 易知 $(p^\alpha,S_N)\neq 1$, 否则与 a_{N+1} 的最小性矛盾, 所以 $p|S_N$.

同理, $p|S_{N+1}$. 但 $(S_{N+1},S_N)=(S_{N+1}-S_N,S_N)=(a_{N+1},S_N)=1$, 矛盾!

所以, $\tau=1$ 时结论成立.

设 $\tau<k\ (k\geq 2)$ 时结论成立, 考察 $\tau=k$ 的情形.

假定存在正整数 $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\notin W$, 必存在正整数 N, 使 $n>N$ 时 $a_n>x$. 于是 $(S_{n-1},x)\neq 1$, 否则与 a_n 的最小性矛盾 ($x\notin W$ 当然异于 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$, 但 x 更小). 于是, 存在 $1\leq i\leq k$. 使

$$p_i|S_{n-1},\forall n>N. \tag{$*$}$$

由归纳假设, 可在 W 中取正整数 $a_j=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{k-1}^{\beta_{k-1}}$, 使 a_j 异于 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ (即 $j>N$), 且 $a_j>x$. 于是 $(a_j,S_{j-1})=1\ (j>N)$, 否则与 a_j 的最小性矛盾. 进而 $(a_j,S_j)=(a_j,S_j-a_j)=(a_j,S_{j-1})=1$. 但 $x<a_j\ (j>N)$, 由 $(*)$, 存在

$1 \le i \le k$, 使 $p_i|S_{j-1}$.

由于 $(a_j, S_{j-1}) = 1$, 只能是 $p_k|S_{j-1}$. 同理, $p_k|S_j$. 但

$$(S_j, S_{j-1}) = (S_j - S_{j-1}, S_{j-1}) = (a_j, S_{j-1} = 1,$$

矛盾!

综上所述，命题得证. $\square$