数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

关于 Cîrtoaje 不等式的一个注记

韩新淼

(浙江省乐清市乐成寄宿中学, 325600)

Vasile Cîrtoaje 在《Algebraic Inequalities》一书中证明了如下代数不等式:

定理 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且满足 $a_1 + \cdots + a_n = n$. 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

冷岗松教授问, 上面的不等式右边的系数是否可用某个绝对常数来代替? 注意到 $\frac{8(n-1)}{n^2} \to 0$ (当 $n \to +\infty$), 所以当 n 充分大时, 这种代替是有意义的.

本文回答了冷岗松教授的问题, 证明了如下定理:

定理 2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且 $a_1 + \cdots + a_n = n$. 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq (2\sqrt{2} - 1)(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

证明 记

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \lambda \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n,$$

其中 $\lambda = 2\sqrt{2} - 1$.

要证

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq (2\sqrt{2} - 1)(1 - a_1 a_2 \cdots a_n),$$

只需证

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq n + \lambda.$$

令 $\varepsilon = \frac{1}{n+\lambda}$. 下面分两种情况讨论.

情况一: 若存在 k_0 $(1 \leq k_0 \leq n)$, 使得 $a_{k_0} < \varepsilon$, 则显然有

$$F(a_1, \cdots, a_n) \geq n + \lambda.$$

收稿日期: 2018-03-30; 修订日期: 2018-08-08.

情况二: $a_k \geq \varepsilon\,(k=1,\cdots,n)$.

由题设条件: $a_1,\cdots,a_n>0$ 且 $a_1+\cdots+a_n=n$, 可得 $a_k\in[\varepsilon,n]$. 又由于 F 为连续函数, 故 F 在有界闭区间上可取到最小值, 设最小值点为 $(b_1,\cdots,b_n)$. 于是只需证明 $F(b_1,\cdots,b_n)\geq n+\lambda$.

若存在 $k_1\,(1\leq k_1\leq n)$, 使得 $b_{k_1}=\varepsilon$, 则显然有

$$F(b_1,\cdots,b_n)\geq n+\lambda.$$

若对所有的 $k\,(1\leq k\leq n)$, 均有 $b_k>\varepsilon$. 则任取 $i,j\,(1\leq i<j\leq n)$ 使得 $a_i+a_j=b_i+b_j$; 取 $k\,(1\leq k\leq n,\ k\neq i,j)$ 使得 $a_k=b_k$. 从而

$$\begin{aligned}F(a_1,a_2,\cdots,a_n)&=\sum_{k\neq i,j}\frac{1}{a_k}+\frac{a_i+a_j}{a_ia_j}+a_ia_j\cdot\lambda\cdot\prod_{k\neq i,j}a_k\\&=\sum_{k\neq i,j}\frac{1}{b_k}+\frac{b_i+b_j}{a_ia_j}+a_ia_j\cdot\lambda\cdot\prod_{k\neq i,j}b_k.\end{aligned}$$

此时 $F(a_1,\cdots,a_n)$ 是关于 a_ia_j 的函数, 其中

$$a_ia_j\in\left[\varepsilon(b_i+b_j-\varepsilon),\left(\frac{b_i+b_j}{2}\right)^2\right],\ \ b_ib_j>\varepsilon(b_i+b_j-\varepsilon).$$

由对勾函数的单调性及 F 在 $(b_1,\cdots,b_n)$ 取到最小值可得

$$\frac{b_i+b_j}{b_ib_j}=b_ib_j\cdot\lambda\cdot\prod_{k\neq i,j}b_k \text{ 或 } b_ib_j=(\frac{b_i+b_j}{2})^2.$$

即 $\frac{1}{b_i}+\frac{1}{b_j}=\lambda\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}b_k$ 或 $b_i=b_j$ 两者必有一个成立. 由此可得 $b_1,\cdots,b_n$ 中至多有两种不同取值.

事实上, 若 $b_i,b_j,b_k\,(1\leq i<j<k\leq n)$ 互不相同, 则必有

$$\frac{1}{b_i}+\frac{1}{b_j}=\frac{1}{b_j}+\frac{1}{b_k}=\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_i}=\lambda\cdot\prod_{l=1}^{n}b_l.$$

这说明 $b_i=b_j=b_k$, 这与 b_i,b_j,b_k 互不相同矛盾. 故 $b_1,\cdots,b_n$ 中至多有两种不同取值.

设 $b_1,\cdots,b_n$ 中有 u 个 $1-vt$, v 个 $1+ut$. 其中 $u,v\in\mathbb{N}^+$, $u+v=n$, $t\in\mathbb{R}$ 且 $0\leq t<\frac{1}{v}$ (若 u,v 中有 0, 则 $b_1=\cdots=b_n=1$, 不等式显然成立). 此时 $F(b_1,\cdots,b_n)$ 可转化为

$$f(t)=\frac{u}{1-vt}+\frac{v}{1+ut}+\lambda\cdot(1-vt)^u\cdot(1+ut)^v,\ \ t\in[0,\frac{1}{v}).$$

故只需证

$$f(t)\geq n+\lambda=u+v+\lambda.$$

因为 f 在 $[0,\frac{1}{v})$ 上连续, 故只需证:

(1) $f(0) \geq n+\lambda$;

(2) $\lim\limits_{t\to(\frac{1}{v})^-} f(t) \geq n+\lambda$;

(3) 对 $t\in[0,\frac{1}{v})$ 满足 $f'(t)=0$, 有 $f(t)\geq n+\lambda$.

对 (1), $f(0)=u+v+\lambda=n+\lambda\geq n+\lambda$.

对 (2), 当 $t\to(\frac{1}{v})^-$ 时, $f(t)\to+\infty$, 故 $\lim\limits_{t\to(\frac{1}{v})^-} f(t)\geq n+\lambda$.

下证 (3). 注意到

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{uv}{(1-vt)^2}-\frac{uv}{(1-ut)^2}+\lambda\cdot(1-vt)^u\cdot(1+ut)^v\cdot(-\frac{uv}{1-vt}+\frac{uv}{1+ut}) \\
&= uv\cdot(\frac{1}{1-vt}-\frac{1}{1+ut})\cdot(\frac{1}{1-vt}+\frac{1}{1+ut}-\lambda\cdot(1-vt)^u\cdot(1+ut)^v).
\end{aligned}
$$

由 $f'(t)=0$ 可得

$$
\frac{1}{1-vt}+\frac{1}{1+ut}=\lambda\cdot(1-vt)^u\cdot(1+ut)^v.
$$

故此时

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{u+1}{1-vt}+\frac{v+1}{1+ut} \\
&= \frac{u^2+u}{u-uvt}+\frac{v^2+v}{v+uvt} \\
&\geq \frac{(\sqrt{u^2+u}+\sqrt{v^2+v})^2}{u+v} \qquad \text{(Cauchy 不等式)} \\
&\geq \frac{(\sqrt{n(n-1)}+\sqrt{2\cdot 1})^2}{u+v} \qquad (1) \\
&= \frac{n^2-n+2+2\sqrt{2n^2-2n}}{n} \\
&> \frac{n^2-n+2\sqrt{2}n}{n} \qquad (2) \\
&= n+2\sqrt{2}-1.
\end{aligned}
$$

其中, (1) 式成立是因为对 $g(x)=\sqrt{x(x+1)}$, $x>0$ 求导, 有

$$
g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x(x+1)}}
$$

关于 x 单调递减, 即 g 在 $(0,\infty)$ 下凸. 由优超不等式即得 (1);

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{2n^2-2n}>\sqrt{2}n-1 \Leftrightarrow 2n^2-2n>2n^2-2\sqrt{2}n+1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{2}-1)n>1$,

利用 $n=u+v\geq 2$ 即知该式成立

综合情况一, 情况二可可知定理 2 成立. □