

数学新星问题征解

第二十九期 (2018.10)

主持: 牟晓生

第一题. 给定奇素数 p 以及非负整数 $s \leq S$. 证明存在两个首一整系数多项式 f 与 g , 使得当正整数 n 变化时, $\gcd(f(n), g(n))$ 含 p 的幂次最小为 s , 最大为 S .

(大连二十四中学生 苏绛毓 供题)

第二题. 求所有正整数 n , 使得 $2^n - 1$ 与 n 的不同素因子个数相等.

(华中师范大学第一附属中学学生 何世航 供题)

第三题. 已知在 $\triangle ABC$ 中, O, I 分别为外心与内心, 且 $OI \parallel BC$. D 是 BC 的中点, 而 P 在线段 AD 上, 满足 $\angle BPC = \pi - \angle BAC$. 直线 BI, CI 分别与 BC 的中垂线交于 E, F 两点, $\triangle AIP$ 与 $\triangle EIF$ 的两个外接圆交于另一点 Q . 证明: $\triangle DPQ, \triangle BEQ, \triangle CFQ$ 的三个外接圆过点 Q 以外的另一公共点.

(苏州中学学生 吴雨桐 供题)

第四题. 设 $P(z)$ 是首一的复系数多项式. 考虑点集 $E = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq 1\}$, 证明: E 能够被半径之和不超过约 100 的一些圆覆盖.

(哈佛大学 牟晓生 供题)