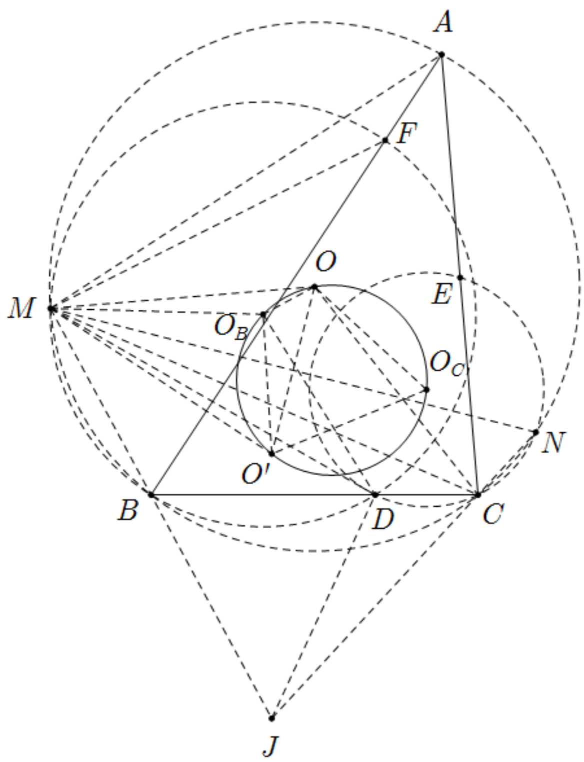
第二十七期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 给定三角形 ABC, 其中 BC 边最短. D 是 BC 上的动点, E,F 分别是 AC,AB 上的点, 满足 $AE=BD, AF=CD$. 设 $\triangle ABC, \triangle BDF, \triangle CDE$ 的外心分别为 O, O_B, O_C. 证明: 在点 D 变化时, $\triangle OO_BO_C$ 的外接圆经过除 O 外的另一个定点.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

解 (根据浙江镇海中学骆晗同学的解答整理):



如图, 取 M,N 分别为 $\triangle ABC$ 外接圆上弧 ABC 以及 ACB 的中点. 注意到 $MA=MA, AF=CD, \angle MAF=\angle MCD$, 故 $\triangle MAF$ 与 $\triangle MCD$ 全等. 又 $\angle MFB=\angle MDB$, 从而 M,B,D,F 四点共圆, 圆心为 O_B. 同理, N,C,D,E

四点共圆, 圆心为 O_C. 于是 $\angle MO_BD = 2(\pi - \angle MBD) = 2\angle MAC = \angle MOC$. 所以 $\triangle MOC$ 与 $\triangle MO_BD$ 这两个等腰三角形旋转相似, $\triangle MO_BO$ 与 $\triangle MDC$ 也相似.

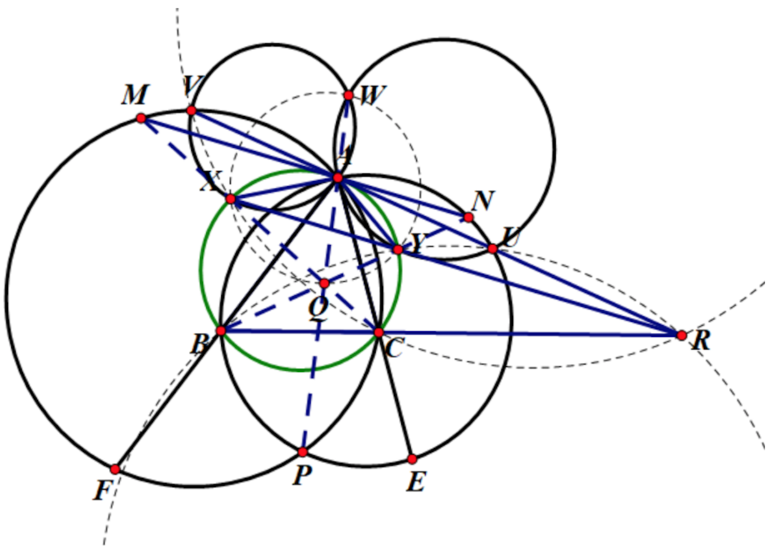
作 O 关于 MN 的对称点 O'. 记 MB 与 NC 的延长线交于点 J, 则 J 为 $\triangle ABC$ 的对应顶点 A 的旁心. 熟知 $MC = MJ$, 且 $\angle CMJ = \angle CAB = \pi - \angle MON = \angle OMO'$. 于是 $\triangle OMO'$ 与 $\triangle CMJ$ 相似. 由前面的推导, O_B 与 D 是这两个相似三角形中的对应点. 故 $\angle OO_BO' = \angle CDJ$, 同理 $\angle OO_CO' = \angle BDJ$. 这样我们就证明了 O, O_B, O', O_C 四点共圆. □

评注 南京师范大学附属中学王劲驰, 杭州二中刘浩宇, 扬州中学吴浩然, 华南师大附中冯宣瑞, 长郡中学常杰, 浙江镇海中学严君啸, 镇海蛟川书院刘哲源, 山大附中傅浩桐, 巴蜀中学关典, 熊诺亚和杨林直等同学以及重庆学而思聂浩川老师也给出了本题的正确解答.

第二题. $\triangle ABC$ 内接于圆 O. E, F 分别在 AC, AB 延长线上. $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACF$ 的外接圆交于另一点 P. 过 A 分别作这两个圆的切线, 与圆 O 分别交于 X, Y. XY 交 BC 于点 R, AR 与 $\triangle ABE$, $\triangle ACF$ 的外接圆分别交于 U, V. $\triangle AXV$ 与 $\triangle AYU$ 的外接圆交于另一点 W. 证明: P, A, W 三点共线.

(杭州二中学生 赵凯文 供题)

证明一 (根据杭州二中刘浩宇同学的解答整理):



如图, 设 BY, CX 交于点 Q, 另外 CX 交圆 (ACF) 于另一点 M, 同理定义点 N. 由 $\angle YXC = \angle YAC = \angle AMC$ 知 $XY \parallel AM$. 同理 $XY \parallel AN$, 故 M, A, N 共线. 继而 $\angle CMN = \angle CXY = \angle CBN$, 推出 B, C, M, N 共圆.

故 $CQ\cdot QM=BQ\cdot QN$, Q 在圆 (ACF) 和圆 (ABE) 的根轴 AP 上.

再注意到 $\angle CXR=\angle CAY=\angle AVC=\angle RVC$, 故 V,X,C,R 共圆. 同理可知 U,Y,B,R 共圆. 因此

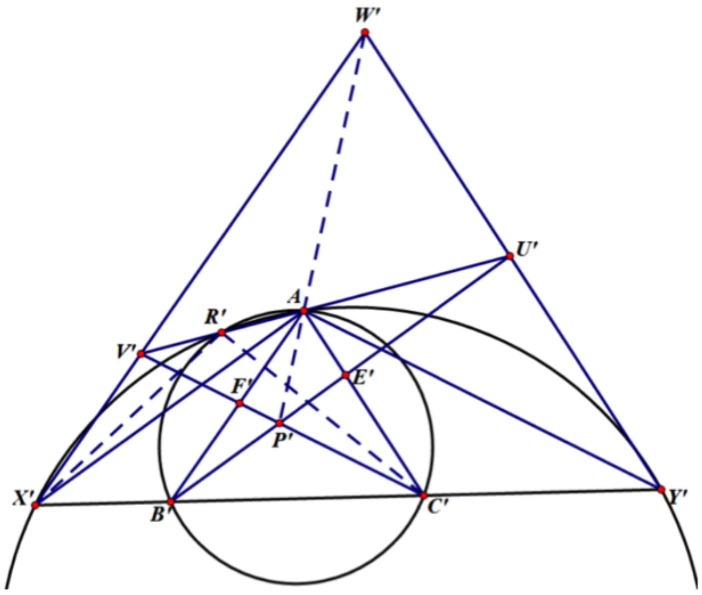
$$\angle XWY=\angle XWA+\angle YWA=\angle XVA+\angle YUA=\angle XCB+\angle YBC=\pi-\angle XQY.$$

故 X,Q,Y,W 共圆. 由此可知

$$\angle XWA=\angle XBA=\angle XCB=\angle XYQ=\angle XWQ,$$

即 A,W,Q 共线. 所以 W,A,Q,P 四点共线, 命题得证! □

证明二 (根据苏州中学吴雨桐同学的解答整理):



以 A 为中心, AP 为半径作反演变换. 对任意点 K, 以 K' 表示 K 的像. 则 P' 为 $B'E'$ 与 $C'F'$ 的交点. $AX'\parallel B'E', AY'\parallel C'F'$, 且 X,Y' 在直线 $B'C'$ 上. 进而 R' 是圆 $(AX'Y')$ 与圆 $AB'C'$ 的另一交点, U',V' 分别是 AR' 与 $B'E'$, $C'F'$ 的交点. 最后 W' 是直线 $X'V'$ 与 $Y'U'$ 的交点. 于是原命题等价于 W',A,P' 共线.

连接 $X'R'$, 则 $\angle R'X'C'=\angle Y'AU'=\angle R'V'C'$, 所以 X',V',R',C' 共圆. 再连接 $C'R'$, 则 $\angle V'X'C'=\angle C'R'A=\angle AB'C'$, 所以 $X'V'\parallel AB'$. 同理 $Y'U'\parallel AC'$, 故 $\triangle W'X'Y'$ 与 $\triangle AB'C'$ 位似, 其位似中心为 $W'A$ 与 $X'Y'$ 的交点 D'. 由于 $C'P'\parallel Y'A, B'P'\parallel X'A$, 点 A 和点 P' 是这两个位似三角形的对应点. 所以 A,P',D' 共线, 也就是 W',A,P',D' 四点共线. □

评注 雅礼中学段钦瀚, 成都外国语学校覃瀚林, 扬州中学吴浩然, 华南师大附中冯宣瑞, 长郡中学常杰, 浙江镇海中学严君啸, 镇海蛟川书院刘哲源, 山

大附中傅浩桐, 绵阳中学何金津, 胡航, 以及巴蜀中学关典和杨林直等同学也给出了本题的正确解答.

第三题. 证明下面的不等式对任意正整数 n 以及实数 x 都成立:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k}\ge 0.$$

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据天津实验中学解尧平同学的解答整理):

令 $f(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k}$, 不妨设 $x\in[0,\pi]$. 注意到

$$f'(x)=-\frac{\sin(\frac{nx}{2})\cdot\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

由此可知对任意的 $0\le j\le\frac{n-1}{2}$, $f(x)$ 在 $[\frac{2j\pi}{n+1},\frac{2j\pi}{n}]$ 上单调递增, 而在 $[\frac{2j\pi}{n},\frac{2(j+1)\pi}{n+1}]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 的局部最小值在 $x=\frac{2(j+1)\pi}{n+1}$ 时取到.

下面我们证明 $f(\frac{2j\pi}{n+1})>f(\frac{2(j+1)\pi}{n+1})$, 也就是

$$\int_{\frac{2j\pi}{n+1}}^{\frac{2j\pi}{n}}\left|\frac{\sin(\frac{nx}{2})\cdot\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right|dx \quad < \quad \int_{\frac{2j\pi}{n}}^{\frac{2(j+1)\pi}{n+1}}\left|\frac{\sin(\frac{nx}{2})\cdot\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right|dx.$$

左边至多为

$$\frac{\int_{\frac{2j\pi}{n+1}}^{\frac{2j\pi}{n}}\cos(\frac{(2n+1)x}{2})-\cos(\frac{x}{2})\,dx}{2\sin\frac{j\pi}{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\sin(\frac{j\pi}{n})}{\sin(\frac{j\pi}{n+1})},$$

而右边至少为

$$\frac{\int_{\frac{2j\pi}{n}}^{\frac{2(j+1)\pi}{n+1}}\cos(\frac{x}{2})-\cos(\frac{(2n+1)x}{2})\,dx}{2\sin\frac{(j+1)\pi}{n+1}\,dx}=\frac{2n+2}{2n+1}-\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\sin(\frac{j\pi}{n})}{\sin(\frac{(j+1)\pi}{n+1})}.$$

由于 $\sin(\frac{(j+1)\pi}{n+1}>\sin(\frac{j\pi}{n+1})$, 我们便证明了

$$f(\frac{2j\pi}{n+1})>f(\frac{2(j+1)\pi}{n+1}).$$

如果 $n=2m-1$ 是奇数, 我们有 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 时取到最小值, 即

$$f(x)\ge 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-(\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{2m-1})>0.$$

如果 $n=2m\ge 6$, 则由 $n=2m-1$ 时的结论可知

$$f(x)\ge 1-(\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{2m})>0.$$

剩下 $n=2,4$ 的情况, 不难直接验证结论成立. □

评注 福建省莆田第一中学洪昕同学也给出了本题的正确解答. 他的方法是在求出极值条件后用 Abel 求和以及归纳法. 有兴趣的同学可以尝试.

第四题. 设 $f(x)$ 是首一的整系数多项式, 满足其所有根均为区间 $(0,3)$ 上的实数. 证明这些根只可能是 $1,2$ 或者 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (**根据山西大学附属中学傅浩桐同学的解答整理**):

设 $f(x)=(x-1)^a(x-2)^b g(x)$, 其中 $g(x)$ 不被 $x-1$ 或 $x-2$ 整除. 令 $g(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 由于 $g(0),g(1),g(2),g(3)$ 均为非零整数, 我们有 $|g(0)g(1)g(2)g(3)|\geq 1$. 所以 $\prod\limits_{i=1}^{n}|x_i(x_i-1)(x_i-2)(x_i-3)|\geq 1$, 也就是

$$\prod_{i=1}^{n}|(x_i^2-3x_i+1)^2-1|\geq 1.$$

当 $x_i\in(0,3)$ 时我们有 $|x_i^2-3x_i+1|\in[0,\frac{5}{4}]$, 所以

$$-1\leq (x_i^2-3x_i+1)^2-1\leq \frac{9}{16}.$$

这说明每个 $(x_i^2-3x_i+1)^2-1$ 的绝对值至多是 1, 所以等号必须成立. 这就证明了 $x_i^2-3x_i+1=0$, $x_i=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. □

评注 (1). 天津实验中学解尧平也给出了本题的正确解答.

(2). 另一种证明如下: 作平移后不妨设 $f(x)$ 的根在区间 $(-1,2)$ 上, 然后考虑 z_i,w_i 为方程 $u^2-ux_i+1=0$ 的两个根. 由于 $x_i\in(-2,2)$, z_i,w_i 是共轭的单位复数. 所以首一整系数多项式 $g(x)=\Pi_{i=1}^{n}(x-z_i)(x-w_i)$ 的根全都是单位复数. 应用 Kronecker 定理, z_i,w_i 都是单位根. 由此可知 $f(x)$ 的每个不可约因子都是 Chebyshev 多项式. 最后只要利用 $x_i>-1$ 的额外条件讨论即可.

(3). Schur 在 1918 年证明了如下更强的结果: 设 I 是一个长度小于 4 的区间, 则所有根均在 I 中的首一整系数不可约多项式只有有限个. 他的证明基于对判别式 $\Delta:=\prod\limits_{i<j}(x_j-x_i)^2$ 的估计. 一方面, Δ 是一个非零整数, 故 $|\Delta|\geq 1$. 另一方面, 可以证明当 $x_i\in I$ 时,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log(\Delta)}{n(n-1)}=\log(|I|)-\log 4.$$

所以当 $|I|<4$ 时, f 的次数 n 是有上限的. 最后应用韦达定理即可知这样的 f 只有有限个.

上面关于 Δ 最大值的渐进估计, 一种证明是通过研究 Jacobi 多项式的性质, 另一种则是应用 Selberg 的积分公式. 两种方法都不太容易, 故我们在这里不予给出更多细节.