2018 年 CMO 中的一个操作问题小析

冯跃峰

今年 CMO 有一个颇为有趣的极值操作问题, 题目如下:

题目 在 $n \times n$ 方格的每个格都填一个整数, 每次操作选取一个方格, 将其同行, 同列的 $2n-1$ 个数都加 1, 其余数不变. 求最大的正整数 N, 使得任何数表均可通过有限次操作使表中至少有 N 个偶数.

(2018 中国数学奥林匹克第 5 题)

该题难度适中, 解题入口较低, 可从多个角度思考. 下面介绍我们的一种思考方式.

【题感】 本题所求的极值,既是“任意型” 的, 又是“存在型” 的, 从而不等式论证及验证等号成立两个方面都需要构造.

对于证明不等式 $N \leq C$, 需要构造一个特定的数表, 证明不论怎样操作, 都不能使 M 中多于 C 个偶数; 对于验证 $N = C$ 合乎要求, 需要对任一数表 M, 构造一系列操作, 使 M 产生至少 C 个偶数.

由于两种构造都一时难以发现，可先研究特例.

【研究特例】 当 $n = 1$ 时, 显然 N 的最大值为 1.

当 $n = 2$ 时, 先考虑“最难” 操作的棋盘 (偶数最少) 能产生多少偶数. 为方便, 将表中的数都按模 2 理解. 取数表 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 尝试如下操作, 第一次操作本质上是唯一的.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

至此, 表中剩下惟一的奇数, 自然想到对该奇数操作, 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2018-11-17.

现在, 表中有 2 个奇数, 接下来自然想是对其中一个奇数操作, 得到:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

以下无需继续操作, 仔细观察, 便有惊喜.

【发掘性质】 通过上述 3 次操作后, 恰有格 $(1,2)$ 改变了奇偶性. 我们将上述 3 次操作捆绑看成一个"大操作", 并认为该大操作是对格 $(1,2)$ 进行的, 它包含的 3 个基本操作分别是对格 $(1,2)$ 所在行与列的 3 个格进行的.

显然, 将每个填奇数的格都进行一次大操作, 则所有数都变成偶数, 所以 N 的最大值为 4.

【归纳通式】 上述大操作的性质是否对任何阶数表都成立呢? 考察一般的 $n \times n$ 数表, 可类似定义大操作. 为叙述问题方便, 先给出如下定义:

【引入定义】 由棋盘一行与一列方格构成的图形称为"十字形", 其中既在行中又在列中的那个格称为十字形的中心. 对以 (i,j) 为中心的十字形的每个格分别进行一次操作, 将这 $2n-1$ 次操作捆绑, 称为对格 (i,j) 进行的一个大操作.

【发掘性质】 在对格 (i,j) 进行的大操作中, 十字形的中心格改变 $2n-1$ 次奇偶性, 十字形的其它格改变 n 次奇偶性 (同行或同列的 n 个操作). 此外, 不在该十字形中的格改变 2 次奇偶性, 是因这样的格所在行与列与该十字形有两个公共格.

显然, 要使只有中心格改变奇偶性, 其它格的奇偶性不变的充分必要条件是 n 为偶数.

【构造操作序列】 由此可见, 当 n 为偶数时, 对所有填奇数的格都进行一次大操作, 则所有格都变成偶数, 此时 N 的最大值为 n^2.

【分割化归】 对 n 为奇数的情形, 可化归到 n 为偶数的情形处理.

首先, 左上角的 $(n-1)\times(n-1)$ 棋盘中的数都可按上述方式操作到全为偶数, 剩下第 n 行与第 n 列共 $2n-1$ 个格中可能有奇数. 如果这 $2n-1$ 个格中填奇数的格超过 $n-1$ 个, 则对格 (n,n) 进行一次基本操作. 于是, 总可使这 $2n-1$ 个格中至少有 n 个偶数.

所以, 存在有限次操作, 使表中至少有 $(n-1)^2+n=n^2-n+1$ 个偶数, 所以 $N=n^2-n+1$ 合乎条件.

下面证明 $N \le n^2-n+1$ (n 为奇).

【构造数表】 我们要构造一个数表, 使无论怎么操作, 都不能产生 n^2-n+2 个偶数. 换句话说, 就是表中任何时候都至少有 $n-1$ 个奇数.

【发掘不变量】我们先发掘操作的特征, 它有一个显然的不变量: 每次操作使每行中奇数 (1 或 n) 个格改变奇偶性, 整个数表中也是奇数个格改变奇偶性. 如果用 S_i 表示第 i 行各数的和, S 表示所有数的和, 则操作中 S_i+S_j, $S+S_i$ 的奇偶性都不变.

【找充分条件】为了存在至少 $n-1$ 个奇数, 一个充分条件是有 $n-1$ 行各至少一个奇数, 即有 $n-1$ 个 S_i 为奇. 结合不变性, 想到如下构造:

取表中第 1 行全为 0, 其余行都为 1. 此时, $S_1=0$ 为偶, $S_i=n\ (2\le i\le n)$ 为奇, 于是由操作中的不变性可知, S_1+S_i 恒为奇.

考察操作中的任一时刻, 如果 S_1 为偶, 则 S_i 为奇, 所以第 i 行至少一个奇数. 注意到 $i=2,3,\cdots,n$, 所以表中至少 $n-1$ 个奇数.

【对称处理】如果 S_1 为奇, 则 $S_i\ (2\le i\le n)$ 为偶, 此时 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n$ 为奇.

记第 j 中数的和为 $T_j\ (1\le i\le n)$, 则由对称性可知, $S+T_j$ 的奇偶性都不变.

由于最初表中 $S+T_j$ 为偶, 所以操作中恒有 $S+T_j$ 为偶. 但上述时刻 S 为奇, 所以该时刻 T_j 为奇, 从而每列至少一个奇数, 所以表中至少 n 个奇数.

所以 N 的最大值为 n^2-n+1.

注 后一部分采用反证法更为简单.

如果某个时刻表中最多有 $n-2$ 个奇数, 则必存在除第一行外的一行全为偶数, 也存在一列全为偶数, 考察该行该列组成的去掉了中心的“空心十字架”, 记其所有数的和为 S. 由于每次操作改变空心十字架中 2 或 $n-1$ 或 $2n-2$ 个数的奇偶性, 所以操作中 S 不变.

但最初状态中 $S_0=2n-3$ 为奇, 目标状态中 $S_1=0$ 为偶, 矛盾!

【新写】由棋盘一行与一列方格构成的图形称为“十字形”, 其中既在行中又在列中的那个格称为十字形的中心.

对以 (i,j) 为中心的十字形的每个格分别进行一次操作, 将这 $2n-1$ 次操作捆绑, 称为对格 (i,j) 进行的一个大操作. 其中, 十字形的中心格改变 $2n-1$ 次奇偶性, 十字形的其它格改变 n 次奇偶性, 不在该十字形中的格改变 2 次奇偶性 (是因这样的格所在行与列与该十字形有两个公共格).

当 n 为偶数时, 每个大操作只改变中心格的奇偶性, 对所有填奇数的格都进行一次大操作, 则所有格都变成偶数, 此时 N 的最大值为 n^2.

对 n 为奇数的情形, 对左上角的 $(n-1)\times(n-1)$ 棋盘按上述方式操作, 使

其变得全为偶数. 对剩下第 n 行与第 n 列共 $2n-1$ 个格, 若奇数超过 $n-1$ 个, 则对格 (n,n) 进行一次基本操作. 于是, 总可使这 $2n-1$ 个格中至少有 n 个偶数.

所以, 存在有限次操作, 使表中至少有 $(n-1)^2+n=n^2-n+1$ 个偶数, 所以 $N=n^2-n+1$ 合乎条件.

下面证明 $N \le n^2-n+1$ (n 为奇).

如果某个时刻表中最多有 $n-2$ 个奇数, 则必存在除第一行外的一行全为偶数, 也存在一列全为偶数, 考察该行该列组成的去掉了中心的"空心十字架", 记其所有数的和为 S.

由于每次操作改变空心十字架中 2 或 $n-1$ 或 $2n-2$ 个数的奇偶性, 所以操作中 S 不变. 但最初状态中 $S_0=2n-3$ 为奇, 目标状态中 $S_1=0$ 为偶, 矛盾!

综上所述, 当 n 为奇数时, N 的最大值为 n^2-n+1; 当 n 为偶数时, N 的最大值为 n^2. □