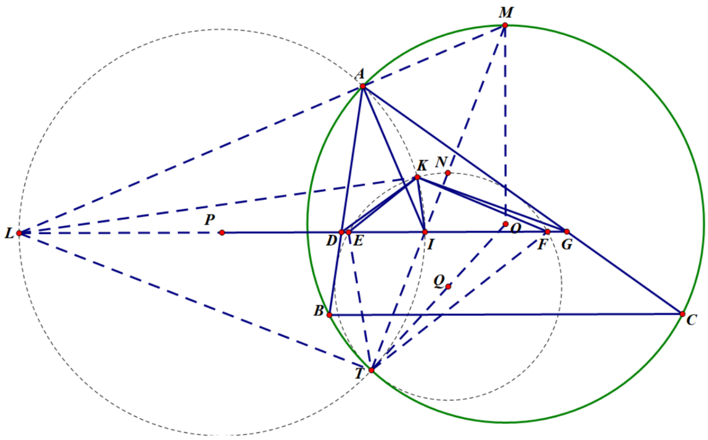
第二十八期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题 已知 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 圆 Ω 与 AB, AC 及圆 Γ 相切, 两圆切点为 T. I 是三角形内心, 过 I 作 BC 的平行线与 AB, AC 分别交于 D, G, 且于圆 Ω 交于两点 E, F. 设 K 为 $\triangle AIT$ 与圆 Ω 除 T 外的另一交点. 证明: $\angle DKE = \angle FKG$.

(湖南雅礼中学学生 黄金阳 供题)

解 (根据苏州中学吴雨桐同学的解答整理):



如图, 取弧 $\widehat{BAC}$ 中点 M, 熟知 T, I, M 共线.设圆 (AIT) 圆心为 P, 则

$$\angle PIA = 90^\circ - \angle ATI = \angle AMO = \angle C + \frac{1}{2}\angle A = \angle AID,$$

其中最后一步用到 $ID \parallel BC$. 于是 P, D, I 共线.

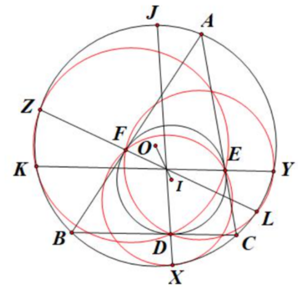
设 Q 为圆 Ω 的圆心, TM 与圆 Ω 交于点 N, 则由相似知 $QN \parallel MO$. 故 $QN \perp EF$, 即 N 是圆 Ω 上弧 EF 的中点. 因此 TI 是 $\angle ETF$ 的角平分线.

延长 IP 交圆 P 于 L. 注意到 $\angle LTI = 90^\circ$, 故 TL 是 $\angle ETF$ 的外角平分线. 于是 L, E, I, F 为调和点列. 由于 $\angle LKI = 90^\circ$, 所以 KI 必定是 $\angle EKF$ 的角平分线. 同理, 利用 AI 平分 $\angle DAG$ 及 $\angle LAI = 90^\circ$, 我们知道 L, D, I, G 也是调和点列. 再结合 $\angle LKI = 90^\circ$, 所以 KI 也是 $\angle DKG$ 的角平分线.

故 $\angle DKE=\angle FKG$, 命题得证! $\square$

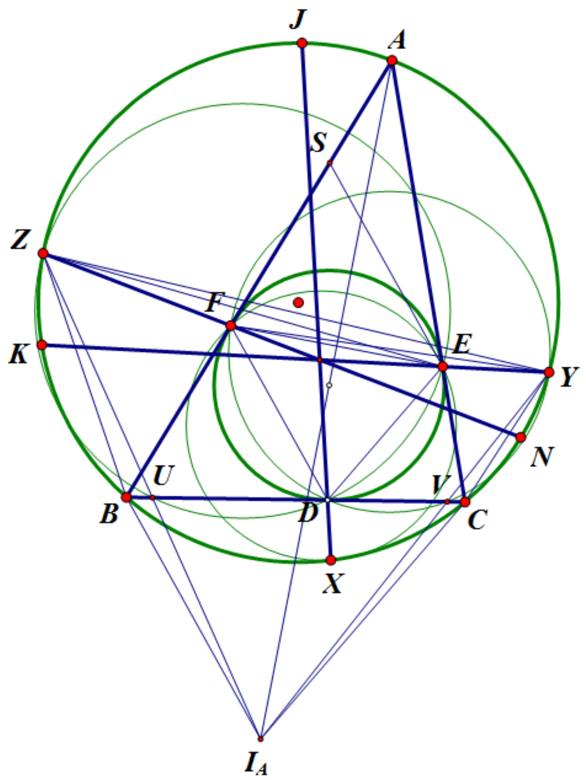
评注 成都嘉祥外国语学校唐龙天, 杭州二中刘浩宇以及浙江镇海中学骆晗, 刘哲源和严君啸等同学也给出了本题的正确解答.

第二题 如右图, $\triangle ABC$ 内接于圆 O 且三边互不相等. J,K,L 分别为弧 $\overset{\frown}{BAC},\overset{\frown}{ABC},\overset{\frown}{ACB}$ 的中点. 内切圆 I 与三边切于 D,E,F. 延长 JD,KE,LF 与圆 O 分别交于 X,Y,Z. 证明: $\triangle XEF,\triangle YFD,\triangle ZDE$ 的三个外接圆的根心在直线 OI 上.



(广西钦州 卢圣 供题)

证明 (根据山东实验中学付艺渲同学的解答整理):



显然, 点 D 在圆 (YDF) 和圆 (ZDE) 的根轴上. 我们将证明 $\triangle ABC$ 中对应顶点 A 的旁心 I_A 也在这条根轴上. 这样, 三条根轴就相交于 $\triangle ABC$ 的切聚点, 熟知它在直线 OI 上.

为此, 设 ZI_A, YI_A 分别与 BC 交于点 U,V. 我们只需证明 Z,U,D,E 共圆, Y,V,D,F 共圆, 以及 Z,U,V,Y 共圆. 过 E 作 DF 的平行线与 AB 交于点 S. 由于

$$\angle FSE=\angle BFD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B=\angle ACK=\angle AYE,$$

我们有 A,S,E,Y 共圆. 故 $\angle YSE=\angle YAE=\angle YBC$, $\angle SYE=\angle SAE=\angle BYC$. 所以 $\triangle YSE$ 与 $\triangle YBC$ 旋转相似. 而 $\triangle FSE$ 与 $\triangle I_ABC$ 也相似, 所以 $\triangle YEF$ 与 $\triangle YCI_A$ 旋转相似. 从而 $\angle FYI_A=\angle EYC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B=\angle FDB$. 也就是 Y,V,D,F 共圆, 同理 Z,U,D,E 共圆.

最后我们需要证明 Z,U,V,Y 共圆. 由于 $EF\parallel KN$, 易知 Z,F,E,Y 共圆. 所以

$$\angle YZI_A=\angle YZE+\angle EZU=\angle YFE+\angle EDC=\angle YI_AC+BCI_A=\angle I_AVU.$$

故 Z,U,V,Y 共圆, 命题得证! □

评注 苏州中学吴雨桐和镇海中学刘哲源同学也给出了本题的正确解答.

第三题 已知 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0, y_1\geq y_2\geq\cdots y_n\geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=n$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n}|x_i-y_i|<e^{\frac{n}{2}}.$$

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

证明 (根据供题者的解答整理):

不妨设 $x_1>y_1,x_2>y_2,\ldots,x_{i_1}>y_{i_1}$, 然后 $x_{i_1+1}<y_{i_1+1},\ldots,x_{j_1}<y_{j_1}$, 依此类推, 直到 $x_{i_k+1}<y_{i_k+1},\ldots,x_{j_k}<y_{j_k}$, $j_k=n$. 记 $\lambda_{2t-1}=i_t-j_{t-1}$, $\lambda_{2t}=j_t-i_t$, 则 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2k-1}$ 为正整数, λ_{2k} 为非负整数, 且

$$\sum_{t=1}^{2k}\lambda_t=n. \tag{1}$$

令 $u_{2t-1}=\frac{\sum\limits_{j_{t-1}+1\leq m\leq i_t}x_m}{\lambda_{2t-1}}$, $u_{2t}=\frac{\sum\limits_{i_t+1\leq m\leq j_t}x_m}{\lambda_{2t}}$, 类似定义 v_{2t-1},v_{2t}. 则

$$\sum_{t=1}^{2k}\lambda_tu_t=n=\sum_{t=1}^{2k}\lambda_tv_t. \tag{2}$$

并且由假设,

$$u_1\geq v_1\geq v_2\geq u_2\geq\cdots\geq v_{2k}\geq u_{2k}. \tag{3}$$

由均值不等式, 对每个 t 有

$$\prod_{j_{t-1}+1\leq m\leq i_t}|x_m-y_m|\leq\left(\frac{\sum\limits_{j_{t-1}+1\leq m\leq i_t}x_m-y_m}{\lambda_{2t-1}}\right)^{\lambda_{2t-1}}=(u_{2t-1}-v_{2t-1})^{\lambda_{2t-1}};$$

$$\prod_{i_t+1\leq m\leq j_t}|x_m-y_m|\leq\left(\frac{\sum\limits_{i_t+1\leq m\leq j_t}y_m-x_m}{\lambda_{2t}}\right)^{\lambda_{2t}}=(v_{2t}-u_{2t})^{\lambda_{2t}}.$$

于是只要证明当 λ_t, u_t, v_t 满足 (1), (2), (3) 时一定有

$$\prod_{t=1}^{k}(u_{2t-1}-v_{2t-1})^{\lambda_{2t-1}}\cdot(v_{2t}-u_{2t})^{\lambda_{2t}}<e^{\frac{n}{2}}.$$

为使左边尽可能大, 我们可以假设 $u_1 \geq v_1 = v_2 \geq u_2 = u_3 \geq \cdots \geq v_{2k-1} = v_{2k} \geq u_{2k} = 0$. 此时再令 $z_{2t-1} = u_{2t-1} - v_{2t-1}$, $z_{2t} = v_{2t-1} - u_{2t}$. 则 (2) 可以改写为

$$\lambda_1(z_1+\cdots+z_{2k})+(\lambda_2+\lambda_3)(z_3+\cdots+z_{2k})+\cdots+(\lambda_{2k-2}+\lambda_{2k-1})(z_{2k-1}+z_{2k})=n. \tag{4}$$

以及

$$(\lambda_1+\lambda_2)(z_2+\cdots+z_{2k})+(\lambda_3+\lambda_4)(z_4+\cdots+z_{2k})+(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k})z_{2k}=n. \tag{5}$$

结论等价于证明

$$\prod_{t=1}^{2k} z_t^{\lambda_t}<e^{\frac{n}{2}}.$$

为此, 取最大的下标 q 使得 $z_q+\cdots+z_{2k}>1$. 利用不等式 $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}>\ln x$, [1] 我们有

$$z_1^{\lambda_1}\cdots z_{q-1}^{\lambda_{q-1}}<e^{\frac{\lambda_1(z_1+2)+\cdots+\lambda_{q-1}(z_{q-1}+2)}{4}}<e^{\frac{\lambda_1(z_1+2z_2+\cdots+2z_{2k})+\cdots+\lambda_{q-1}(z_{q-1}+2z_q+\cdots+2z_{2k})}{4}}.$$

将 (4) 和 (5) 相加, 我们有

$$\sum_{t=1}^{2k}\lambda_t\cdot(z_t+2z_{t+1}+\cdots+2z_{2k})=2n.$$

代入上面的不等式, 即知

$$z_1^{\lambda_1}\cdots z_{q-1}^{\lambda_{q-1}}<e^{\frac{n}{2}-\frac{\lambda_q z_q+\cdots+\lambda_{2k}z_{2k}}{4}}.$$

若 $z_q \leq 1$, 则 $z_q^{\lambda_q} \leq 1$ 以及 $z_{q+1}^{\lambda_{q+1}}\cdots z_{2k}^{\lambda_{2k}} \leq 1$ (因为 $z_{q+1}+\cdots+z_{2k} \leq 1$). 这样直接得到 $z_1^{\lambda_1}\cdots z_{2k}^{\lambda_{2k}}<e^{\frac{n}{2}}$, 命题成立.

若 $z_q>1$, 我们令 $A=\lambda_{q+1}z_{q+1}+\cdots+\lambda_{2k}z_{2k}$, $B=\lambda_{q+1}+\cdots+\lambda_{2k}$. 则由 q 的选取知 $A \leq B$. 用均值不等式,

$$z_{q+1}^{\lambda_{q+1}}\cdots z_{2k}^{\lambda_{2k}} \leq (\frac{A}{B})^B.$$

于是有

$$\prod_{t=1}^{2k} z_t^{\lambda_t}<e^{\frac{n}{2}-\frac{\lambda_q z_q}{4}-\frac{A}{4}}\cdot z_q^{\lambda_q}\cdot(\frac{A}{B})^B=e^{\frac{n}{2}-\frac{\lambda_q z_q}{4}+\lambda_q\ln(z_q)}\cdot e^{-\frac{A}{4}+B\ln A-B\ln B}.$$

通过求导知 $-\frac{A}{4}+B\ln A-B\ln B \leq -\frac{B}{4}$ 对任意 $A \leq B$ 成立. 又有

$$B=n-\lambda_1-\cdots-\lambda_q \geq n-\frac{n}{z_q},$$

[1]通过求导知只需验证 $x=4$ 时不等式成立. 此时左边为 1.5, 右边为 $\ln 4<1.5$.

其中的不等式在 q 为奇数时利用 (4), 而在 q 为偶数时利用 (5). 所以进一步有

$$\prod_{t=1}^{2k} z_t^{\lambda_t} < e^{\frac{n}{2}-\frac{\lambda_q z_q}{4}+\lambda_q\ln(z_q)}\cdot e^{-\frac{n}{4}+\frac{n}{4z_q}} = e^{\frac{n}{4}+\frac{n}{4z_q}}\cdot e^{-\frac{\lambda_q z_q}{4}+\lambda_q\ln(z_q)}.$$

如果 $\ln(z_q)\le\frac{z_q}{4}$, 则 $e^{-\frac{\lambda_q z_q}{4}+\lambda_q\ln(z_q)}\le 1$, 于是由 $z_q\ge 1$ 可得命题. 如果 $\ln(z_q)>\frac{z_q}{4}$, 则利用 $\lambda_q\le\frac{n}{z_q}$ 知 $e^{-\frac{\lambda_q z_q}{4}+\lambda_q\ln(z_q)}\le e^{-\frac{n}{4}+\frac{n\ln(z_q)}{z_q}}$. 此时有

$$\prod_{t=1}^{2k} z_t^{\lambda_t} < e^{\frac{n}{4}\cdot(\frac{1+4\ln(z_q)}{z_q})}.$$

注意到 $\frac{1+4\ln(z)}{z}$ 的最大值在 $z=e^{\frac{3}{4}}$ 时取到, 其值为 $\frac{4}{e^{\frac{3}{4}}}<2$. 所以命题得证! □

评注 由以上解答可以看出 $e^{\frac{n}{2}}$ 仍有一些改进的空间. 有兴趣的同学可以探索(渐进)最佳的上界.

第四题 令 $\Omega(n)$ 为正整数 n 的素因子个数(计重数), 而 $\omega(n)$ 为 n 的不同素因子个数(不计重数).

(a) 证明存在 n, 使得 $\omega(n+1)<\omega(n+2)<\cdots<\omega(n+2018)$;

(b) 证明存在 n, 使得 $\Omega(n+1)<\Omega(n+2)<\cdots<\Omega(n+2018)$.

(浙江省乐清市乐成寄宿中学学生 林子淮 谢柏庭 供题)

(b) 的证明 (**根据人大附中依嘉同学的解答整理**):

设 $p_1,p_2,\ldots$ 为从小到大排列的素数. 考虑 k 满足 $p_k>p_1(p_2)^2\cdots(p_{2018})^{2018}$, 再取充分大的正整数 t. 由中国剩余定理, 我们可以取正整数 n 满足下面的同余式:

$$n\equiv -i-(p_i)^{it-1}\pmod{(p_i)^{it}},\quad \forall 1\le i\le 2017;$$

$$n\equiv -2018\pmod{(p_{2018})^{2018t}\cdot p_{2019}p_{2020}\cdots p_{k-1}}.$$

并且我们可以保证 $n\le(p_1)^t(p_2)^{2t}\cdots(p_{2018})^{2018t}\cdot p_{2019}\cdots p_{k-1}$. 所以对充分大的 t, $n+2018<p_k^{t-2018^2}$.

我们来证明对这样的 n, $\Omega(n+i)<\Omega(n+i+1)$ 对每个 $1\le i\le 2017$ 成立. 由于 $p_{i+1}^{(i+1)t-1}\mid n+i+1$, 显然有 $\Omega(n+i+1)\ge(i+1)t-1$. 于是只要证明 $\Omega(n+i)\le(i+1)t-2$, 也就是要证

$$\Omega\left(\frac{n+i}{p_i^{it-1}}\right)\le t-1.$$

为此, 首先注意到 $\frac{n+i}{p_i^{it-1}}$ 不是 p_i 的倍数. 其次, 对任意的 $j\le 2018, j\ne i$, $n+i$ 中含 p_j 的幂次不超过 $j-i$ 中含 p_j 的幂次. 所以 $\frac{n+i}{p_i^{it-1}}$ 的不超过 p_{2018} 的素因子个数至多是 2018^2. 然后由于 $p_{2019}p_{2020}\cdots p_{k-1}\mid n+2018$, $\frac{n+i}{p_i^{it-1}}$ 与 $p_{2019}p_{2020}\cdots p_{k-1}$

互素. 最后由于 $n+i<p_k^{t-2018^2}$, $\frac{n+i}{p_i^{it-1}}$ 的超过 p_k 的素因子个数小于 $t-2018^2$. 这样就证明了 $\Omega(\frac{n+i}{p_i^{it-1}})\le t-1$.

(a) 的证明: 这一问看似类同, 但实际难度大了很多. 上述方法失效的主要原因在于无法让 $n+i$ 有 t 个不同素因子, 并同时保持 t 的指数级增长. 具体来说, 对充分大的正整数 t, 令

$$M_i=\prod_{\frac{i^2-i}{2}\cdot t<m\le\frac{i^2+i}{2}\cdot t}p_m.$$

我们可以类似地取正整数 n 满足 $M_i\mid n+i$ 对 $1\le i\le 2018$ 成立. 则 n 的大小约为 $M=\prod_i M_i=\prod_{m\le\frac{2018\cdot 2019t}{2}}p_m$. 然而这个数要比 $(p_{\frac{2018\cdot 2019t}{2}+1})^t$ 大不少, 因此无法证明 $\frac{n+i}{M_i}$ 的不同素因子个数小于 t.

为解决这一困难, 我们可以不仅考虑满足 $M_i\mid n+i$ 的最小的 n_0, 还能更一般地考虑 $n_0+\lambda M$, 这样的数都满足 $M_i\mid n+i$. 所以只要找到某个 λ 使得 $\omega(\frac{n_0+\lambda M}{M_i})<t$ 对每个 i 成立. 通过估计 $\frac{n_0+\lambda M}{M_i}$ 的平均约数个数可以证明存在这样的 $\lambda\in[M,2M]$. 具体细节详见 Jean-Marie de Koninck 等人 2009 年发表在 Proceedings of the American Mathematical Society 上的论文 *"On Strings of Consecutive Integers with a Distinct Number of Prime Divisors"*. □