一个大集构造问题

陈博文

(江苏省徐州市第一中学, 221140)

在冯跃峰老师的《组合构造》一书中, 第 141-142 页有一道例题:

问题 设 n 为正奇数, M 是 n 个非零复数的集合, 对 M 的任何子集 A, 定义 $S(A)$ 为 A 中各元素之和, 其中规定 $S(\emptyset)=0$. 设 $A\subseteq M$, 如果对任意 $B\subseteq M$, 有 $|S(A)|\geq|S(B)|$, 则称 A 为 M 的一个大集. 求 M 的大集个数最大值.

书中给出了 M 的大集个数的最大值为 $2n$.

遗留问题是当 n 为偶数时, 大集个数的最大值是多少? 本文给出这一问题的分析与解答.

分析与解 原解答中已经证明: 不论 n 是奇数还是偶数, 大集个数都不超过 $2n$.

(1) $n=2$ 时, $|S(\emptyset)|=0$, $\emptyset$ 不能为大集, 而 M 有 3 个非空子集, 从而大集个数不超过 3.

设 $M=\{1,\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\}$, 则这三个子集均为大集.

综上, 所求最大值为 3.

(2) $n\geq 4$ 时, 设 $n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*,\ k\geq 2$.

下面给出一种构造, 使大集个数为 $2n$.

思路是将 $n=2k-1$ 情形的其中一个复数拆成两个复数的和, 为使原有性质保持相似, 可将其中一个新复数的模长变得尽可能小. 为方便划分半集, 应使新复数的幅角变化范围易于控制.

下面给出具体构造: 取

$$z_j=e^{2\pi\mathrm{i}\frac{j}{2k-1}},\ j=1,2,\cdots,2k-2,$$

收稿日期: 2018-07-05; 修订日期: 2018-09-25.

注意到 $1-e^{\mathrm{i}\theta}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\theta-\pi}{2}}$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k-1}z_j&=\frac{2\pi\mathrm{i}\frac{j}{2k-1}(1-e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{2k-1}}(k-1))}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2k-1}}}\\&=\frac{e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{2k-1}}2\sin\frac{k-1}{2k-1}\pi e^{\mathrm{i}\pi(\frac{k-1}{2k-1}-\frac{1}{2})}}{2\sin\frac{\pi}{2k-1}e^{\mathrm{i}\pi(\frac{k-1}{2k-1}-\frac{1}{2})}}\\&=\frac{\sin\frac{k-1}{2k-1}\pi}{\sin\frac{1}{2k-1}\pi}e^{\mathrm{i}\frac{k}{2k-1}\pi}.\end{aligned}$$

令

$$r=\frac{\sin\frac{k-1}{2k-1}\pi}{\sin\frac{1}{2k-1}\pi},$$

则

$$\sum_{j=1}^{k-1}z_j=re^{\mathrm{i}\frac{k}{2k-1}\pi},r>0.$$

取

$$z_{2k-1}=-re^{\mathrm{i}\frac{k}{2k-1}\pi}(1-e^{-\mathrm{i}\varepsilon})=2\sin\frac{\varepsilon}{2}re^{(\frac{1}{4k-2}\pi-\frac{\varepsilon}{2})\mathrm{i}},$$

其中 ε 为充分小的正数, 使得

$$\arg(z_{2k-1})\in\left(\frac{\pi}{4(2k-1)},\frac{\pi}{2k-1}\right),$$

且

$$\arg(1-z_{2k-1})=\left(-\frac{\pi}{2k-1},\frac{\pi}{4(2k-1)}\right).$$

(这是能够办到的, 因为 $\varepsilon\to0$ 时, $\arg(z_{2k-1})\to\frac{\pi}{4(2k-1)}$, $\arg(1-z_{2k-1})\to0$)

取

$$z_{2k}=1-z_{2k-1},\ M=\{z_1,z_2,\cdots,z_{2k}\},$$

则

$$z_1+z_2+\cdots+z_{2k}=\sum_{j=1}^{2k-1}e^{2\pi\mathrm{i}\frac{j}{2k-1}}=0.$$

且

$$\arg(z_1)=\frac{2}{2k-1}\pi,$$

$$\arg(-z_{k-1})=-\frac{\pi}{2k-1},$$

$$\arg(-z_k)=\frac{\pi}{2k-1},$$

$$\arg(z_{2k-2})=-\frac{2}{2k-1}\pi,$$

知 z_{2k-1} 和 z_{2k} 落在 $O_{z_{k-1}}$ 和 O_{z_k} 两条直线的内夹角内. 按逆时针方向为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2k-2}, z_{2k}, z_{2k-1}$.

从而在 $4k$ 个半集中, 有 $4k-2$ 个, z_{2k-1} 和 z_{2k} 或者不出现, 或者同时出现, 易知这 $4k-2$ 个半集模为

$$\frac{\sin\frac{k-1}{2k-1}\pi}{\sin\frac{1}{2k-1}\pi} = r.$$

只有一种划分方式将 z_{2k-1} 和 z_{2k} 割裂开, 这两个半集为 $\{z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_{2k-1}\}$ 和 $M \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_{2k-1}\}$.

对于前者, 因为 $z_1 + z_2 + \cdots + z_{k-1} + z_{2k-1} = re^{\mathrm{i}\frac{k}{2k-1}\pi} \cdot e^{-\mathrm{i}\varepsilon}$, 从而它的模为 r; 对于后者, 其模为

$$\begin{aligned}
&|S(M) - S(\{z_1, z_2, \cdots, z_{k+1}, z_{2k-1}\})| \\
=&|0 - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{k+1} + z_{2k-1})| \\
=&r.
\end{aligned}$$

从而 $4k$ 个半集模相等, 又大集存在, 且为某半集, 故 $4k$ 个半集全为大集. 至此, 问题已解决.

下面是 $n=6$ 时的示意图.