数学新星问题征解

第三十期 (2018.11)

主持: 牟晓生

第一题. 对任意正整数 n, 记 $\phi(n)$ 为 n 的欧拉函数, 而 $\Phi(n)=\sum\limits_{m=1}^{n}\phi(m)$. 证明:

$$\prod_{m=1}^{n} m^{\phi(m)} \geq \sqrt{\Phi(n)^{\Phi(n)}}.$$

(清华大学学生 孙孟越 供题)

第二题. 正整数 $a_1,\cdots,a_n$ 满足如下条件: 对任意 $1\leq k\leq n$, 存在 $A\subseteq\{1,\ldots,n\}$ 使得 $k\in A$ 且 $\prod\limits_{i\in A}a_i$ 为完全平方数. 证明:

(a) 存在 $\{1,\ldots,n\}$ 的 $\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ 元子集 B 使得 $\prod\limits_{i\in B}a_i$ 为完全平方数.

(b) 存在无穷多个 n 及满足条件的数组 $(a_1,\ldots,a_n)$, 使得上一问中的 $\frac{n+1}{2}$ 是最优的 (即不存在 $|B|>\frac{n+1}{2}$ 使得 $\prod\limits_{i\in B}a_i$ 为完全平方数).

(哈佛大学 吴昊 供题)

第三题. 设 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为 n 个非空集合, 证明下面的和非负:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|A_i|}-\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{2}{|A_i\cup A_j|}+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\frac{3}{|A_i\cup A_j\cup A_k|}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{|A_1\cup\cdots\cup A_n|}.$$

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

第四题. (a) 求最小的正整数 c, 使得存在正整数 x,y 满足 $y^3-2x^2=c$.

(b) 对上一问中最小的 c, 求满足 $y^3-2x^2=c$ 的所有正整数对 (x,y).

(哈佛大学 牟晓生 供题)