数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

Figalli 不等式的初等证明

罗横溢　胡子轩

(湖南师范大学附属中学, 410008)

指导教师: 张湘君

Figalli (2018 菲尔茨奖得主) 在文 [1] 中, 利用分析方法建立了下述不等式 (这个不等式是这篇文章中一个重要的引理):

定理 设实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. 记

$$\lambda_A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k,\ \lambda_G=\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

则

$$7n^2(\lambda_A-\lambda_G)\ge\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_G)^2.$$

冷岗松教授将这个问题给了我们, 并希望得到一个初等证明. 下面, 我们给出该不等式的初等证明.

证明 注意到不等式除 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 外无明显的取等. 我们用 $f(n)$ 替换 $7n^2$, 探索不等式对怎样的 $f(n)$, 下述不等式成立:

$$f(n)(\lambda_A-\lambda_G)\ge\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_G)^2. \tag{1}$$

若 $\lambda_A=\lambda_G$, 则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$, 从而 (1) 式恒成立.

若 $\lambda_A>\lambda_G$. 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_G)^2&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\lambda_G+n\lambda_G^2\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2-2n\lambda_A\lambda_G+n\lambda_G^2\\&=\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2}{n}+\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^2}{n}-2n\lambda_A\lambda_G+n\lambda_G^2\end{aligned}$$

收稿日期: 2018-09-05;　修订日期: 2018-11-15.

$$=n\left(\lambda_A-\lambda_G\right)^2+\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2}{n},$$

故若要 (1) 成立, 只需

$$f(n)\ge\frac{1}{\lambda_n}\Big(n(\lambda_A-\lambda_G)+\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2}{n(\lambda_A-\lambda_G)}\Big).\tag{2}$$

由 $\lambda_A-\lambda_G<\lambda_A\le\lambda_n$ 知

$$\frac{n(\lambda_A-\lambda_G)}{\lambda_n}<n.\tag{3}$$

注意到

$$\begin{aligned}(\lambda_i-\lambda_j)^2&=(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j})^2(\sqrt{\lambda_i}-\sqrt{\lambda_j})^2\\&\le(2\sqrt{\lambda_n})^2(\sqrt{\lambda_i}-\sqrt{\lambda_j})^2\\&=4\lambda_n(\lambda_i+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}).\end{aligned}\tag{4}$$

由 (2), (3), (4) 知, 要使 (1) 成立, 只需

$$\begin{aligned}&f(n)\ge n+\frac{4\sum\limits_{1\le i<j\le n}(\lambda_i+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_i\lambda_j})}{n(\lambda_A-\lambda_G)}\\ \Leftrightarrow&(f(n)-n)n(\lambda_A-\lambda_G)\ge4\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_i+\lambda_j-2\sqrt{\lambda_i\lambda_j})\\&\qquad=4n(n-1)\lambda_A-8\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\\ \Leftrightarrow&(f(n)-5n+4)n\lambda_A+8\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\ge(f(n)-n)n\lambda_G.\end{aligned}\tag{5}$$

由均值不等式知

$$8\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\ge8\cdot\frac{n(n-1)}{2}\lambda_G=(4n-4)n\lambda_G.$$

结合上式和 $\lambda_A\ge\lambda_G$ 知, 若 $f(n)\ge5n-4$, 则 (5) 式成立, 从而 (1) 也成立.

特别地, 当 $f(n)=7n^2$ 时, $7n^2+4>5n$, 故原不等式成立. □

评注 此不等式的证明具有一定难题, 关键在于对 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda_G)^2$ 展开后 $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2$ 的处理. 笔者开始将其放为 $n\lambda_A\lambda_n$ (即将 λ_i^2 放为 $\lambda_i\lambda_n$), 并且自认为放得很好, 因为保证了仍可取等, 并且降低了幂次. 但尝试后发现这样无法处理最大的 拦路虎": 要证不等式左边的 $\lambda_A-\lambda_G$.

在上面的证明中, 我们将变量都移到不等式右侧. 利用拉格朗日恒等式和均值不等式证明了结论. 并且常数 $7n^2$ 可优化为 $5n-4$.

参考文献

[1] Figalli, A.; Maggi, F.; Pratelli, A. A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities. Invent. Math. 182 (2010), no. 1, 167 – 211.