第 34 届 CMO 试题解答与评析

袁祉祯

(湖北省武钢三中, 430080)

指导教师: 邓晓

第 34 届 CMO (中国数学奥林匹克) 于 2018 年 11 月 12 日至 16 日在四川省成都七中举行. 作为参赛者, 笔者在考试中发挥正常, 取得了较好的成绩. 下面介绍第 34 届 CMO 试题的解答, 并对解法进行评析. 不当之处, 恳请读者批评指正.

题 1 对全体满足 $a,b,c,d,e\geq 1$ 且满足 $a+b+c+d+e=5$ 的实数 (a,b,c,d,e), 求

$$S=(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)$$

的最大值及最小值.

解 设 $x=a+b, y=b+c, z=c+d, u=d+e, v=e+a$, 则 $S=xyzuv$, 且

$$a=x+z+v-5, b=y+u+x-5,$$

$$c=z+v+y-5, d=u+x+z-5, e=v+y+u-5.$$

这样题设的条件等价于 $x+y+z+u+v=10$, 且将 x,z,v,y,u 按此顺序放在圆周上时, 任意相邻的 3 个数之和不小于 4.

下面求 $S=xyzuv$ 的最大值和最小值. 此时 $x,y,z,u,v\geq -2$.

(1) x,y,z,u,v 中有一个数为 0, 则 $S=0$.

(2) x,y,z,u,v 中有 5 个正数, 则由平均值不等式得

$$0<S=xyzuv\leq\left(\frac{x+y+z+u+v}{5}\right)^5=32.$$

(3) x,y,z,u,v 中有 4 个正数和 1 个负数, 不妨设 $x<0$, 则

$$y+z+u+v=10-x\leq 12,$$

收稿日期: **2018-11-29;** 修订日期: **2018-12-05.**

$$0 > S \geq -2yzuv \geq -2\left(\frac{y+z+u+v}{4}\right)^4 \geq -2\times 3^4 = -162.$$

(4) x,y,z,u,v 中有 3 个正数和 2 个负数, 不妨设 $x<0$.

若 y,v 中有负数, 不妨设 $y<0$, 由 $x+y+u\geq 4$ 得 $u\geq 4-x-y>4$, 且 $z+u+v=10-x-y$, 所以 $z+v\leq 6<2u$, 所以

$$\begin{aligned} uvz &\leq u\left(\frac{z+v}{2}\right)^2 = u\left(\frac{10-x-y-u}{2}\right)^2 \\ &\leq (4-x-y)\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9(4-x-y), \end{aligned}$$

而 $0<xy\leq 4$, 故

$$0 < S \leq 4\times 9(4-x-y) \leq 4\times 9\times(4+2+2) = 228.$$

若 z,u 中有负数, 不妨设 $z<0$, 则 $u\geq 4-x-z>4$, 且 $y+u+v=10-x-z$, 所以 $y+v\leq 6<2u$, 同理可得

$$0 < S \leq 4\times 9(4-x-z) \leq 4\times 9\times(4+2+2) = 288.$$

(5) x,y,z,u,v 中有 2 个正数和 3 个负数, 所以两个正数在 x,z,v,y,u 的圆周排列中不相邻, 不妨设这 2 个正数为 x,y. 则

$$x+y = 10-z-u-v \leq 10+2+2+2 = 16,$$

所以

$$0 > S = xyzuv \geq \left(\frac{16}{2}\right)^2\times(-2)\times(-2)\times(-2) = -512.$$

(6) x,y,z,u,v 中有 1 个正数和 4 个负数, 则必有 3 个负数在 x,z,v,y,u 的圆周排列中相邻, 矛盾!

(7) x,y,z,u,v 中有 5 个负数, 则此时与 $x+y+z+u+v=10$ 矛盾!

综上所述: $-512\leq S\leq 288$, 且两边的等号可以取等.

当 $x=y=z=-2, u=v=8$, 即 $a=b=c=d=-1, e=9$ 时, $S_{\min}=-512$.

当 $x=y=-2, z=v=3, u=8$, 即 $a=b=c=-1, d=e=4$ 时, $S_{\max}=288$. □

评注 本题的关键步骤即找到 x,y,z,u,v 与 a,b,c,d,e 的等价条件, 然后转化成一道与 a,b,c,d,e 无关的问题, 后面只需要对 x,y,z,u,v 的正负讨论即可. 这是一道较为简单、但讨论起来需要细心的代数题.

题 2 若正整数 a,b,c 是一个直角三角形的三边长, 则称三元集合 $\{a,b,c\}$

为勾股三元组. 求证: 对任意勾股三元组 P, Q, 存在正整数 $m \geq 2$ 与勾股三元组 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 使得 $P_1 = P, P_m = Q$, 且对任意 $1 \leq i \leq m-1$, 有 $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$.

证明 若将构成直角三角形三边长的正整数 a, b, c 两两连边, 则只需证明 P 中元素与 Q 中元素连通. 故只需证明 $3, 4, 5, \cdots$ 均连通. (这里为等价结论)

又注意到当 a, b 连通时, 对任意 $t \in \mathbb{N}^*$, ta, tb 也连通.

下面归纳证明: $3, 4, \cdots, k$ 两两连通.

注意到 $\{3,4,5\}, \{5,12,13\}, \{9,12,15\}, \{15,20,25\}, \{7,24,55\}, \{6,8,10\}, \{8, 15, 17\}$ 均为勾股三元组, 所以命题对 $k = 3, 4, \cdots, 10$ 均成立.

假设命题对 $k (k \geq 10)$ 成立, 考虑 $k+1$ 的情形.

若 $k+1$ 为奇数, 则由

$$(k+1)^2 + \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(k+1)^2 + 1}{2}\right)^2$$

得 $k+1$ 与 $\frac{k(k+2)}{2}$ 连边.

因为 3 与 k 连通, 所以 $3\left(\frac{k+2}{2}\right)$ 与 $k\left(\frac{k+2}{2}\right)$ 连通. 因为 3 与 $\frac{k+2}{2}$ 连通 $(3 \leq \frac{k+2}{2} \leq k)$, 得 3×3 与 $3 \cdot \frac{k+2}{2}$ 连通, 所以 $k \cdot \frac{k+2}{2}$ 与 9 连通. 而 $3 \leq 9 \leq k$, 所以 $k+1$ 与 $3, 4, \cdots, k$ 连通.

若 $k+1$ 为偶数, 因为 3 与 $\frac{k+1}{2}$ 连通$(3 \leq \frac{k+1}{2} \leq k)$, 得 6 与 $k+1$ 连通, 所以 $k+1$ 与 $3, 4, \cdots, k$ 连通. 故由数学归纳法知命题成立.

此时题中的结论显然成立. □

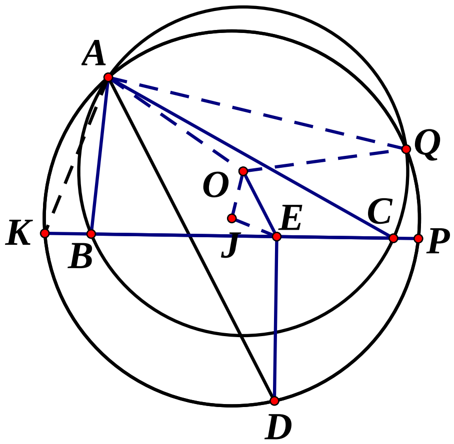
评注 把题中的结论转化为等价结论 $3, 4, , \cdots, k$ 连通不难, 但要证明该结论必须发现当 a, b 连通时, 对任意 $t \in \mathbb{N}^*$, ta, tb 也连通, 然后归纳. 这是一道常规的组合加数论的题.

题 3 在 $\triangle ABC$ 中, $AB < AC$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, D 是 $\angle BAC$ 平分线上一点, E 在 BC 上, 满足 $OE \parallel AD, DE \perp BC$. 在射线 EB 上取点 K 满足 $EK = EA$, $\triangle ADK$ 的外接圆与 BC 交于另一点 P (不同于点 K), $\triangle ADK$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一点 Q (不同于点 A), 求证: PQ 与 $\triangle ABC$ 外接圆相切.

证明 因为 AD 平分 $\angle BAC$, 且 $OE \parallel AD, ED \perp BC$, 则

$$\angle EDA = \angle BAD + \angle ABC - 90^\circ = \angle CAD - \angle OAC = \angle OAD.$$

所以四边形 $OEDA$ 为等腰梯形, 即 OE 与 AD 有公共的中垂线.



设 $\triangle ADK$ 的外心为 J, 结合 $EA = EK$ 知 JE 为 KA 的中垂线. 又 J 在 OE 与 AD 公共的中垂线上, 且 JO 为 AQ 的中垂线, 所以

$$\begin{aligned}\angle AQP &= 180^\circ - \angle AKE = 90^\circ + \angle JEK = \angle JED \\ &= \angle JOA = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOQ = 90^\circ + \angle AQO.\end{aligned}$$

所以, PQ 与 $\triangle ABC$ 外接圆相切. 得证. □

评注 此题主要运用等腰梯形及圆的各种对称性.若不用对称性说明角相等很难做出, 但用了对称性后很容易通过导角证出结论, 对称性也不难被看出, 故作者认为这是一道不难的几何题, 放在题 3 的位置并不合适.

题 4 给定一个长轴与短轴不等长的椭圆.

(1) 证明: 其面积最小的外切菱形是唯一的.

(2) 写出用尺规作图作出这个菱形的过程.

解 (1) 设椭圆的中心为 O, 以 O 为原点, 长轴和短轴所在直线分别为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系. 则可设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

设菱形在椭圆的上四个切点顺次排列为 M, N, K, L, 所以过 M, K 的切线平行, M, K 关于点 O 对称. 同理, N, L 关于点 O 对称.

所以过 M, N 的切线的交点与过 K, L 的切线的交点关于点 O 对称, 菱形的对称中心为 O. 作菱形的内切圆, 其圆心为 O.

又菱形四边所在直线为圆 O 与椭圆的四条公切线, 所以由公切线的唯一性及圆 O 与椭圆关于 x, y 轴对称可得菱形的四个顶点在 x, y 轴上.

不妨设其中两个顶点为 $(x_0, 0), (0, y_0), x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$, 则菱形的面积为 $2x_0y_0$.

又因为方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

恰有一解. 所以 $\frac{a^2}{x_0^2}+\frac{b^2}{y_0^2}=1$, 由均值不等式得 $1\geq 2\frac{ab}{x_0y_0}, x_0y_0\geq 2ab$, 当 $x_0=\sqrt{2}a, y_0=\sqrt{2}b$ 时, 取等唯一. 故该菱形是唯一的.

(2) 对椭圆上一点 P, 作过点 P 的直线交椭圆与另一点 P', 取线段 PP' 上一点 X (X 不为 PP' 中点), 过 X 作另一直线交椭圆于 Q, Q'.

所以 $PQ \parallel P'Q', PQ' \parallel P'Q$, 不同时成立. 不妨设 PQ 与 $P'Q'$ 不平行, 其交点为 M.

若 PQ' 交 $P'Q$ 于 N, 则连 MN 交直线 PP' 于 Y (若 $PQ' \parallel P'Q$, 则过 M 作 PQ' 平行线交直线 PP' 于 Y), 此时有 X, Y, P, P' 成调和点列.

连 YQ, YQ' 交椭圆于另两点 R, R', 若 $RQ' \parallel QR'$, 则过点 P 作 RQ' 平行线, 否则 RQ' 交 QR' 于 Z, 连接 PZ.

总之, 由极线知识可得最后作的为 P 关于椭圆的切线.

回到原题, 取椭圆上一点 P, 由上述方法作 P 关于椭圆的切线.

作一条与该切线平行的直线交椭圆于两个交点 Q, R, 再作出点 Q, R 关于椭圆的切线, 两条切线交于点 X, 连接 PX 交椭圆于另一点 P'. (若 X 不存在, 过点 P 作 Q 关于椭圆切线的平行线交椭圆于 P').

取 PP' 中点 O 即为椭圆中心. 再过点 P 作两组不同的垂线交椭圆于 M_1, N_1 与 $M_2, N_2(\angle M_1PN_1=\angle M_2PN_2=90^\circ)$.

设 M_1N_1, M_2N_2 交于 Y. 若 P, Q, Y 共线, 则其为长轴或短轴所在直线. 若 P, Q, Y 不共线, 则 $\angle POY$ 的内外角平分线为长轴、短轴所在直线.

设长轴、短轴所在直线交椭圆于 A_1, A_2 和 B_1, B_2, 过 A_1, B_1 分别作 OA_1, OB_1 的垂线交于 C, 连接 OC 交椭圆于 T_1, T_2, 再作 T_1, T_2 关于椭圆的两切线交长短轴所在直线于四个点, 这四个点即为菱形的四个顶点. □

评注 这是一道不常规的几何题, 主要考察对圆锥曲线结论的应用, 以及尺规作图的技巧, 第一问需要说明菱形的四个顶点在长、短轴所在直线上, 故可考虑作出内切圆利用对称性.用解析计算的方法也能做出来, 较为容易.第二问作者的方法有些复杂, 这一问方法很多, 需要对椭圆结论的熟练运用.

题 5 给定一个 $n\times n$ 的方格表, 每个格子中填入一个整数. 每次操作选择一

个方格, 将其同行、同列的 $2n-1$ 个数都加 1. 求最大的 N, 使得无论开始时方格表内数填的是多少, 均可以通过有限次操作使得方格表内至少有 N 个偶数.

解 当 n 为偶数时, 对一个方格选择它所在的行和列中所有的 $2n-1$ 个方格, 每个方格各操作一次. 易知只有这一个方格奇偶性改变. 故有限次操作后可使方格表中有 n^2 个偶数, 而 $N \le n^2$, 所以 $N_{\max} = n^2$.

当 n 为奇数时, 我们来说明: $N_{\max} = n^2 - n + 1$.

构造: 第一行全为奇数, 其他行全为偶数, 设最后停止操作时, 第 i 行有 a_i 个奇数, 第 j 列有 b_j 个奇数 $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

考虑 i_1 与 i_2 行 $(1 \le i_1 < i_2 \le n)$ 的所有奇数个数, 无论如何操作, 该个数的奇偶性不变.

同理对列也成立.所以

$$\forall 2 \le i \le n,\ a_i + a_1 \equiv n \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow a_2 \equiv a_3 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 1 - a_1 \pmod 2,$$

$$\forall 1 \le i < j \le n,\ b_i + b_j \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow b_1 \equiv b_2 \equiv \cdots \equiv b_n \pmod 2,$$

1) $a_2 \equiv a_3 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 1 \pmod 2$, 则至少有 $n-1$ 个奇数, 所以 $N \le n^2 - n + 1$.

2) $a_2 \equiv a_3 \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 0 \pmod 2$, $a_1 \equiv 1 \pmod 2$, 又因为

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 1 \pmod 2,$$

所以 $b_1 \equiv b_2 \equiv \cdots \equiv b_n \equiv 1 \pmod 2$, 则至少有 n 个奇数, 所以 $N \le n^2 - n$.

综上, $N \le n^2 - n + 1$.

下证: 对任意初始情况, 可适当操作至有 $n^2 - n + 1$ 个偶数. 我们考虑调整操作.

称①选择 $i, j (i, j \in \{1, 2, \cdots, n\})$ 为对第 i 行第 j 列中的格进行题中操作.

称②选择 $i_1, i_2, j_1, j_2 (i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, \cdots, n\}, i_1 \ne i_2, j_1 \ne j_2)$ 为对第 i_1 行 j_1 列, i_1 行 j_2 列, i_2 行 j_1 列, i_2 行 j_2 列中四个格分别进行一次题中操作.此时, 只有这 4 个方格中的数奇偶性改变.

若表中第 i 行有不少于 2 个奇数, 第 j 列有不少于 2 个奇数

情形 1. 第 i 行 j 列格为奇数, 则存在 $i_1 \ne i, j_1 \ne j$, 使第 i_1 行 j 列, i 行 j_1 列格为奇数. 选 i, i_1, j, j_1, 操作一次②, 此时, 奇数总个数变少.

情形 2. 第 i 行 j 列格为偶数, 则存在 $i_1 \ne i_2, j_1 \ne j_2$, 使第 i_1 行 j 列, i_2 行 j 列, i 行 j_1 列, i 行 j_2 列格为奇数. 选 i, i_1, j, j_1, 操作一次②, 选 i, i_2, j, j_2, 操作一次②, 此时, 奇数总个数变少.

故可反复进行如上操作至表中每行至多 1 个奇数或每列至多 1 个奇数. 不妨设每列至多 1 个奇数, 若存在 $2 \le i \le n$ 使第 i 行有不少于 2 个奇数. 可由②将 2 个奇数变为偶数, 而第 1 行增加 2 个奇数. 故最后不妨设第一行有 a 个奇数.

若总共有至少 n 个奇数, 则恰有 n 个奇数.

1° $a = n$, 则选 1,1, 操作一次①即可.

2° $a < n$, 则 $a \ge 1$, 不妨第 1 行 i 列为奇数$(i = 1, 2, \cdots, a)$, 第 $1+i$ 行 $a+i$ 列为奇数$(i = 1, 2, \cdots, n-a)$, 则选 1,1 操作一次①, 再每次选 $1, 1+i, 1, a+i$ 操作一次② $(i = 1, 2, \cdots, n-a)$, 最后至多有 $a(a \le n-1)$ 个奇数. 得证.

综上, $N_{\max} = \begin{cases} n^2, & n \text{ 为偶数} \\ n^2 - n + 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$. □

评注 这是一道想起来容易, 也容易从小的情况入手的一道常规组合题. 此题有更简洁的做法, 但从一般的调整法把方格表变得更清晰, 似乎更为自然.构造时找到的不变量需要自己去猜测和把握. 此题难度一般.

题 6. 设点 $P_1, P_2, \cdots, P_{2018}$ 放在给定正五边形的内部或边界上移动 (点可重合). 对于

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 2018} |P_i P_j|^2$$

取到最大值时, 求所有可能的摆放情况.

解 设正五边形的中心为 O, 以其为原点建立平面直角坐标系. 设其五个顶点的顺时针排列依次为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 若存在 $P \in \{P_1, P_2, \cdots, P_{2018}\}$, 使得 $P \notin \{A_i\}_{i=1}^5$.

设 $P_1, P_2, \cdots, P_{2018}$ 中除 P 外所有点横坐标平均值为 x_0, 纵坐标的平均值为 y_0. 设 $Q(x_0, y_0)$, 则点 Q 在正五边形内或边界上, 设 $P(x, y)$, 所以

$$S = 2017\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) + C,$$

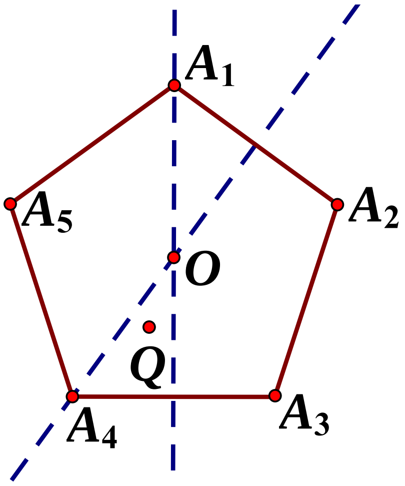
其中 C 为常数, 与 x, y 无关.

连 A_iO 得到 5 条直线将正五边形分成 10 个区域. 不妨设 Q 在如图所示区域中.

下证: $|PQ| < |A_1Q|$.

连 QP 并延长 (若 P, Q 重合则任取一射线) 交边界于 P', 所以 $|PQ| \le |P'Q|$. 而

$$|P'Q| \le \max\{|QA_i|\}_{i=1}^5 = |QA_1|,$$



且上面的等号不可能同时取到. 故有 $|PQ|<|A_1Q|$. 所以将 P 调整为 A_1, 顶点上的点数增加, $S=2017|PQ|^2+C$ 增大, 故调整必停止, 此时所有点均在正五边形的顶点上, 由于排列情况数有限, 所以 S 的最大值存在, 且取到最大时, 所有 P_i 在顶点上.

此时, 设 $P_i(x_i,y_i)$,

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{1\le i<j\le 2018}\left((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right)\\
&=2017\left(\sum_{i=1}^{2018}x_i^2+\sum_{i=1}^{2018}y_i^2\right)-2\sum_{1\le i<j\le 2018}(x_ix_j+y_iy_j)\\
&=2018\sum_{i=1}^{2018}(x_i^2+y_i^2)-\left(\sum_{i=1}^{2018}x_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{2018}y_i\right)^2\\
&=2018^2\cdot|OA_1|^2-\left(\sum_{i=1}^{2018}x_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{2018}y_i\right)^2.
\end{aligned}$$

设 $\sum\limits_{i=1}^{2018}\overrightarrow{OP_i}=\overrightarrow{OT}$, 所以当 S 取到最大值时, $|OT|$ 取到最小.

设顶点 A_i 上有 a_i 个点 $(i=1,2,3,4,5)$, 约定 $\forall i\in\mathbb{N}, A_{i+5}=A_i, a_{i+5}=a_i$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=2018$, 所以 a_i 必为 4 奇数 1 偶数或 2 奇数 3 偶数或 5 个偶数.

讨论知存在 $i\in\mathbb{N}$ 使

$$a_{i+1}\equiv a_{i+4}, a_{i+2}\equiv a_{i+3}\pmod 2,$$

不妨设此时 $i=1$, $\overrightarrow{OA_1}$ 方向为 y 轴方向. 设 $|OT|$ 最小时, $T(x',y')$. 又设摆放情况为 $(a_1,\frac{a_2+a_5}{2},\frac{a_3+a_4}{2},\frac{a_3+a_4}{2},\frac{a_2+a_5}{2})$ 时, T 变为 T', 易知 $T'(0,y')$, $|OT'|\le|OT|$, 由 $|OT|$ 得最小性, 知 $x'=0$, 即有

$$a_1\times 0+a_2\times\cos 18^\circ+a_3\times\cos 54^\circ-a_4\times\cos 54^\circ-a_5\cos 18^\circ=0,$$

若 $a_2\neq a_3$ 或 $a_3\neq a_4$, 则 $\frac{\cos 54^\circ}{\cos 18^\circ}=4\cos^2 18^\circ-3\in\mathbb{Q}$, 矛盾！故 $a_2=a_5,a_3=a_4,T=T'$.

可设 $|OA_1|=1$, 所以 $y'=a_1+2a_2\cos 72^\circ-2a_3\cos 36^\circ$, 其中 $a_1=2018-2a_2-2a_3$, 所以

$$\begin{aligned}|OT|&=|2018-2a_2-2a_3+2a_2\cos 72^\circ-2a_3\cos 36^\circ|\\&=|2018-\frac{5}{2}(a_2+a_3)+\frac{\sqrt{5}}{2}(a_2-a_3)|.\end{aligned}$$

设 $m=4036-5(a_2+a_3)\equiv 1 \pmod 5, n=a_3-a_2, m,n\in\mathbb{Z}, m\neq 0$, 则

$$2|OT|=|m-\sqrt{5}n|=\frac{|m^2-5n^2|}{|m+\sqrt{5}n|}.$$

下面考虑 $2|OT|<1$ 的情形, 则 $mn>0$, 注意到 $m^2-5n^2\equiv 16 \pmod{20}$,

(1) 若 $m^2-5n^2\neq -4$, 则 $2|OT|\geq\frac{16}{4036}=\frac{1}{252.25}$,

(2) 若 $m^2-5n^2=-4, |m|\leq 4036, |n|\leq 1999$, 下面求出所有满足该方程的 $(|m|,|n|)$.

① m,n 为偶数, 则 $\left(\frac{m}{2}\right)^2-5\left(\frac{n}{2}\right)^2=-1$.

设 $\frac{m}{2}=2x+5y, \frac{n}{2}=x+2y$, 即 $x=\frac{5}{2}n-m, y=\frac{m}{2}-n$, 则

$$x^2-5y^2=1, x,y\in\mathbb{Z}.$$

由佩尔方程理论知方程 $x^2-5y^2=1$ 的全部正整数解可表示为

$$x+\sqrt{5}y=(9+4\sqrt{5})^t,$$

其中 t 为任意正整数. 结合 $|y|\leq 2018$ 得

$$(|x|,|y|)=(1,0),(9,4),(161,72),(2889,1292).$$

又 $mn>0$, 则

$$(|m|,|n|)=(4,2),(76,34),(1364,610).$$

② m,n 为奇数, 则 $m+n$ 和 $m-n$ 中必有一者为 4 的倍数.

若 $m\equiv n \pmod 4$, 设 $m=x+5y, n=x+y$, 则 $x=\frac{5n-m}{4}, y=\frac{m-n}{4}$.

若 $m\equiv -n \pmod 4$, 设 $m=x+5y, n=-x-y$, 则 $x=-\frac{5n+m}{4}, y=\frac{m+n}{4}$.

此时均有 $x^2-5y=1$, 结合 $|y|\leq 1009$ 及 ① 知 $(|x|,|y|)=(1,0),(9,4),(161,72)$,

$$(|m|,|n|)=(1,1),(11,5),(29,13),(199,89),(521,233).$$

结合①、②得

$(|m|,|n|)=(1,1),(4,2),(11,5),(29,13),(76,34),(199,89),(521,233),(1364,610)$.

而当 $(|m|,|n|)=(1364,610)$, 由 $m\equiv 1 \pmod 5$ 得 $a_2+a_3=1080>1009$,

矛盾!

当 $(|m|,|n|)=(521,233)$, 由 $m\equiv 1 \pmod 5$,$mn>0$ 得 $m=521,n=233,a_2=235,a_3=468$, 此时

$$2|OT|=\frac{4}{521+233\sqrt{5}}<\frac{1}{260}.$$

当 $(|m|,|n|)$ 为其他情况均有 $|m+\sqrt{5}n|<521+233\sqrt{5}$, 即有

$$2|OT|>\frac{4}{521+233\sqrt{5}}.$$

综上, $2|OT|_{\min}=\frac{4}{521+233\sqrt{5}}$, 当且仅当 $m=521,n=233$ 时,等号成立. 此时 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(612,235,468,468,235)$, 所有情况为其轮换. □

评注 这是一道复杂的无理数有理逼近题, 首先把点调整到顶点上以及结论所等价的 $|OT|$ 最小不难推出, 但后面题目转化到对 $\sqrt{5}$ 有理逼近较难想到, 此题偏难, 是一道考察综合能力的题.考场上作者并未做出, 上述解法是参考别人的思路得到的.