2018 年秋季上海新星数学奥林匹克试题解析

吴尉迟[1]　罗振华[2]

(1. 上海大学, 200444; 上海四季教育, 200070)

2018 年秋季上海新星数学奥林匹克于 2018 年 11 月 23 日 8 点到 12 点在上海举行. 下面介绍此次考试的试题和解答.

I. 试 题

1. 我们称正整数 n 的因子 d 是"特殊的", 若 $d+1$ 也是 n 的因子.

(1) 证明: 任意一个正整数至多有一半的正因子是特殊的.

(2) 求所有正整数 n, 使得它恰有一半的正因子是特殊的.

(上海四季教育 罗振华 供题)

2. 已知在 $\triangle ABC$ 中, L, M, N 分别为边 BC, AC, AB 的中点. 记 $\triangle LMN$ 的外接圆为 ω. 过 L 分别作 ω 切线, 分别交直线AB, AC 于点 L_1, L_2; 过 M 分别作 ω 切线, 分别交 直线BC, BA 于点 M_1, M_2; 过 N 分别作 ω 切线, 分别交 直线CA, CB 于点 N_1, N_2. 证明：直线 L_1N_2, M_1L_2, N_1M_2 相互平行.

(河南省郑州一中 张甲 供题)

3. 设 $n \geq 2$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$ 且满足对任意 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $x_ix_j \geq i$. 求 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最小值.

(浙江乐清市知临中学 王政　羊明亮 供题)

4. 给定整数 $n \geq 2$. 对每个正整数染上 n 种颜色之一, 要求每种颜色都被使用, 并且对每个正整数 k, 在 $k+1, k+2, \cdots, k+n$ 中至少有一个数所染的颜色与 k 所染的颜色相同. 一种颜色被称为"有趣的", 如果染有该颜色的全体正整数从小到大依次构成无穷等差数列. 求有趣的颜色的种数的所有可能值.

(上海市七宝中学 叶一超, 华东师范大学 何忆捷 供题)

收稿日期: 2018-12-03.

5. 设非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 满足 $\sum\limits_{1\le i<j\le 2018} x_i x_j = 1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{s-x_i}$$

的最小值, 其中 $s = \sum\limits_{i=1}^{2018} x_i$.

(浙江省杭州第二中学 赵斌, 北京大学 王坤 供题)

6. 设 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{999}$ 是平面上两两不同的点, 且无三点共线. 问: 点 A_0 最多是多少个三角形 $A_iA_jA_k (1 \le i < j < k \le 999)$ 的内点.

(北京大学 吴茁 供题)

II. 解 答

题 1. 我们称正整数 n 的因子 d 是"特殊的", 若 $d+1$ 也是 n 的因子.

(1) 证明: 任意一个正整数至多有一半的正因子是特殊的.

(2) 求所有正整数 n, 使得它恰有一半的正因子是特殊的.

解 我们先证明: 若 d 是 n 的一个特殊因子, 则 $d < \sqrt{n}$. $\quad (*)$

事实上, 若 $d \ge \sqrt{n}$ 是 n 的特殊的因子, 则 $d+1$ 也是 n 的因子, 从而 $\frac{n}{d}, \frac{n}{d+1}$ 均是正整数, 故

$$\frac{n}{d} \ge \frac{n}{d+1} + 1,$$

这等价于 $n \ge d(d+1)$, 这与 $d \ge \sqrt{n}$ 矛盾!

若 $a \ne \sqrt{n}$ 是 n 的因子, 则 $\frac{n}{a}$ 也是 n 的因子, 且这两个因子恰有一个小于 $\sqrt{n}$. 再又结论 $(*)$ 知, n 至多有一半的因子是特殊的.

下面求所有满足条件的正整数 n.

若 n 恰有一半的因子是特殊的, 则由结论 $(*)$ 和一半的因子小于 $\sqrt{n}$ 知, 每个小于 $\sqrt{n}$ 的因子都是特殊的. 故 1 是特殊的因子, 从而 2 是因子, 进一步, 2 是特殊的因子. 以此类推, 每一个小于 $\sqrt{n}$ 的正整数都是 n 的因子.

设 k 是 n 最大的特殊的素因子, $k+1$ 是 n 的因子, 但不是特殊的因子. 又由结论 $(*)$ 知, $k+1 \ge \sqrt{n}$, 从而有

$$n = k(k+1) = k^2 + k.$$

若 $k = 1$, 则 $n = 2$ 满足条件.

若 $k \ge 2$. 又每个小于 $\sqrt{n}$ 的因子都是特殊的, 故 $k-1$ 也是 n 的因子, 从而

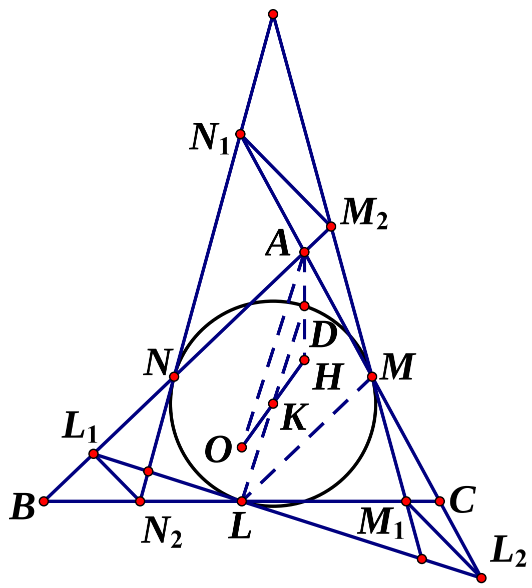
$$k-1 \mid n-(k-1)(k+2) = k^2+k-(k^2+k-2) = 2,$$

这说明 $k=2$ 或 3. 此时, $n=6$ 或 12, 均满足条件.

综上, $n=2,6,12$ 满足条件. □

评注 这是一道简单的数论题, 考试中约 85% 的同学做对此题. 第一问的关键在于发现特殊因子都小于 $\sqrt{n}$, 这样马上就能证得结论. 第二问需要细致分析 n 的因子情况, 即说明每个小于 $\sqrt{n}$ 的因子均是特殊的, 再稍加讨论得到结果.

题 2. 已知在 $\triangle ABC$ 中, L,M,N 分别为边 BC,AC,AB 的中点. 记 $\triangle LMN$ 的外接圆为 ω. 过 L 分别作 ω 切线, 分别交直线AB,AC 于点 L_1,L_2; 过 M 分别作 ω 切线, 分别交 直线BC,BA 于点 M_1,M_2; 过 N 分别作 ω 切线, 分别交 直线CA,CB 于点 N_1,N_2. 证明: 直线 L_1N_2, M_1L_2, N_1M_2 相互平行.



证明 设三角形 ABC 的外心为 O, 垂心为 H, OH 的中点为 K, 则过 L,M,N 的圆是三角形 ABC 的九点圆, 圆心为 K, L 的对径点 D 是 AH 的中点, $DL\parallel AO$. 于是

$$\begin{aligned}\angle DLC =&180^\circ-\angle OAC-\angle ACB\\ =&180^\circ-(90^\circ-\angle ABC)-\angle ACB\\ =&90^\circ+\angle ABC-\angle ACB.\end{aligned}$$

又因为 L_2L_1 是圆 K 在 L 点的切线, 所以 $KL\perp L_1L_2$, 故

$$\angle L_2LC=90^\circ-\angle DLC=\angle ACB-\angle ABC.$$

又 M,L 分别为 AC,BC 中点, 所以 $ML\parallel AB$. 于是

$$\angle MLL_2=\angle MLC+\angle L_2LC=\angle ABC+\angle ACB-\angle ABC=\angle ACB,$$

结合 $\angle LML_2 = \angle CML$ 可得 $\triangle MLL_2 \sim \triangle MCL$, 从而

$$\frac{ML_2}{ML} = \frac{ML}{MC} \Rightarrow ML_2 = \frac{c^2}{2b}.$$

同理, 由 $\triangle MLM_1 \sim \triangle CLM$ 得

$$\frac{MM_1}{ML} = \frac{MC}{LC} \Rightarrow MM_1 = \frac{bc}{2a}.$$

于是

$$\frac{ML_2}{MM_1} = \frac{ac}{b^2}.$$

类似可得

$$\frac{MN_1}{MM_2} = \frac{ac}{b^2}.$$

故

$$\frac{ML_2}{MM_1} = \frac{MN_1}{MM_2}.$$

于是 $N_1M_2 /\!\!/ M_1L_2$. 同理, $M_1L_2 /\!\!/ L_1N_2$, 故 L_1N_2, M_1L_2, N_1M_2 三线平行. $\square$

评注 这是一道中等偏易的几何题, 考试中约 72% 的同学做对此题. 上述解法的思路是通过找相似三角形计算比例来证明平行,考场上也有部分同学是通过三角法来计算比例.

题 3. 设 $n \geq 2$, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^+$ 且满足对任意 $1 \leq i < j \leq n$, 有 $x_i x_j \geq i$. 求 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的最小值.

解 所求最小值 $\lambda(n) = \begin{cases} (n-1)!!, & 若\ 2 \mid n, \\ (n-2)!!\sqrt{n-1}, & 若\ 2 \nmid n. \end{cases}$

先证明:

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \lambda(n). \tag{1}$$

i) 当 $2 \mid n$ 时, 由条件知

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{n-1}x_n) \geq (n-1)!!.$$

ii) 当 $2 \nmid n$ 时, 由条件知

$$x_1 x_2 \cdots x_{n-3} = (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_{n-4}x_{n-3}) \geq (n-4)!!.$$

又

$$\begin{aligned} x_{n-2}x_{n-1}x_n =& \sqrt{(x_{n-2}x_{n-1})(x_{n-1}x_n)(x_{n-2}x_n)} \\ \geq& \sqrt{(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n-2)} \end{aligned}$$

$$=(n-2)\cdot\sqrt{n-1},$$

将上述两式相乘得, $x_1x_2\cdots x_n \geq (n-2)!!\cdot\sqrt{n-1}$.

下讨论 (1) 等号成立的条件.

当

$$x_n = x_{n-1} = \sqrt{n-1},\ x_i = \frac{i}{x_{i+1}},\ \forall 1 \leq i \leq n-2 \tag{2}$$

时, 等号成立.

下面再说明构造 (2) 满足条件. 即证: $x_ix_j \geq i$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$. 由 x_i 的构造知, 只需要证明 $x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_n$. 从而只要证

$$x_i \geq \sqrt{i-1},\ \forall 2 \leq i \leq n. \tag{3}$$

当 $i =, n, n-1$ 时, (3) 显然成立.

下讨论 $2 \leq i \leq n-2$ 情形.

若 $2 \mid n-i$, 则

$$\begin{aligned}x_i =&\frac{i}{x_{i+1}} = \frac{ix_{i+2}}{i+1} = \frac{i(i+2)}{(i+1)(x_{i+3})} = \cdots\\ =&\frac{i(i+2)\cdots(n-2)}{(i+1)(i+3)\cdots(n-3)x_{n-1}}\\ =&\frac{i(i+2)\cdots(n-2)}{(i+1)(i+3)\cdots(n-3)\cdot\sqrt{n-1}},\end{aligned}$$

又 $k \geq \sqrt{k-1}\sqrt{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, 故

$$x_i \geq \frac{(\sqrt{i-1}\sqrt{i+1})(\sqrt{i+1}\sqrt{i+3})\cdots(\sqrt{n-3}\sqrt{n-1})}{(i+1)(i+3)\cdots(\sqrt{n-1})} = \sqrt{i-1}.$$

此时, (3) 成立.

若 $2 \nmid n-i$, 则

$$\begin{aligned}x_i =&\frac{i(i+2)\cdots(n-3)x_{n-1}}{(i+1)(i+3)\cdots(n-2)}\\ =&\frac{i(i+2)\cdots(n-3)\sqrt{n-1}}{(i+1)(i+3)\cdots(n-2)}\\ \geq&\frac{(\sqrt{i-1}\sqrt{i+1})(\sqrt{i+1}\sqrt{i+3})\cdots(\sqrt{n-4}\sqrt{n-2})\sqrt{n-1}}{(i+1)(i+3)\cdots(n-2)}\\ >&\sqrt{i-1}.\end{aligned}$$

从而 (3) 得证. 此时, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足题目要求. □

评注 这是一道中等偏难的不等式问题, 考试中约 27% 的同学做对此题. 此题命题的想法来源于 2010 年 USAMO 的第三题: 2010 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2010}$, 满足对任意 $1 \leq i < j \leq 2010$, 有 $a_ia_j \leq i+j$. 求 $a_1a_2\cdots a_{2010}$ 的最大值.

本题中下界证明所用的方法是把相邻两项配对然后使用题设条件进行放缩. 例子的构造需要使用递推数列, 先取最后两项均为 $\sqrt{n-1}$, 再用递推方法构造前 $n-2$ 项, 最后证明这个数列是递增的就能证得到它是满足题目条件的.

题 4. 给定整数 $n \geq 2$. 对每个正整数染上 n 种颜色之一, 要求每种颜色都被使用, 并且对每个正整数 k, 在 $k+1, k+2, \cdots, k+n$ 中至少有一个数所染的颜色与 k 所染的颜色相同. 一种颜色被称为"有趣的", 如果染有该颜色的全体正整数从小到大依次构成无穷等差数列. 求有趣的颜色的种数的所有可能值.

解 首先证明, 至少存在一种有趣的颜色. 对 $i=1,2,\cdots,n$, 将染有第 i 种颜色的最小正整数记为 i_m. 不失一般性, 设

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_n.$$

引理 对任意正整数 $t \geq m_n$, $t, t+1, \cdots, t+n-1$ 遍历 n 种颜色.

引理的证明 用反证法. 假设对某种颜色 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 及某个正整数 $t \geq m_n$, $t, t+1, \cdots, t+n-1$ 均未被染颜色 i, 那么 $1,2,\cdots,t-1$ 均不含颜色 i (否则, 取 k 为 $1,2,\cdots,t-1$ 中被染有颜色 i 的最大数, 则 $k+1,\cdots,t-1,t,\cdots,t+n-1$ 不含颜色 i, 但由条件, $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中有一个数被染了颜色 i, 这与 $k \leq t-1$ 矛盾).

从而, 由 i_m 的定义知, 但这与 $m_i \leq m_n \leq t$ 矛盾. 引理证毕.

回到原题. 由引理知, 对任意正整数 $t \geq m_n$, $t, t+1, \cdots, t+n-1$ 遍历 n 种颜色, $t+1, t+2, \cdots, t+n$ 也遍历 n 种颜色, 于是 $t+n$ 与 t 同色. 这意味着染有第 n 种颜色的全体正整数恰好为 $m_n, m_n+n, m_n+2n, \cdots$, 它们构成等差集.

另一方面, 对任意 $j=1,2,\cdots,n$, 我们构造如下染色方式, 使得恰有 j 种有趣的颜色: 令集合

$$A_1 = \{1, n-j+1, 2n-j+1, 3n-j+1, \cdots\},$$

$$A_2 = \{2, n-j+2, 2n-j+2, 3n-j+2, \cdots\},$$

$$\cdots$$

$$A_{n-j} = \{n-j, 2n-2j, 3n-2j, 3n-2j, \cdots\},$$

$$A_{n-j+1} = \{2n-2j+1, 3n-2j+1, 4n-2j+1, \cdots\},$$

$$A_{n-j+2} = \{2n-2j+2, 3n-2j+2, 4n-2j+2, \cdots\},$$

$$\cdots$$

$$A_n = \{2n-j, 3n-j, 4n-j, \cdots\}.$$

并将 A_i 中的元素用第 i 种颜色进行染色, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 易验证, 每个集合 A_i 中相邻两数至多相差 n, 即对任意正整数 k, k 所染的颜色在 $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中总能出现, 符合题意. 注意到当且仅当 $n-j+1\le i\le n$ 时, A 的元素从小到大构成等差数列, 此时第 i 种颜色是有趣的, 于是在这种染色方式下恰有 j 种有趣的颜色.

综上所述, 有趣的颜色的种数的所有可能值为 $1,2,\cdots,n$. □

评注 这是一道中等难度的组合数论问题. 考试中约 36% 的同学做对此题. 本题的关键是发现每种颜色的数从某项开始是公差为 n 的等差数列, 这就得出至少有一种有趣的颜色. 构造的方法不唯一, 上述解法是在公差为 n 的无穷等差数列基础上添加干扰项来控制等差数列的个数, 从而构造出恰有 j $(1\le j\le n)$ 种有趣的颜色的例子.

题 5. 设非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2018}$ 满足 $\sum\limits_{1\le i<j\le 2018} x_ix_j=1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}$$

的最小值, 其中 $s=\sum\limits_{i=1}^{2018}x_i$.

解法 1 所求的最小值为 $2\sqrt{2016}=24\sqrt{14}$.

由条件知,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}&=\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}\left(\sum_{1\le j<k\le 2018}x_jx_k\right)\\
&=\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}\left(x_i\sum_{j\ne i}x_j+\sum_{1\le j<k\le 2018,j\ne i,k\ne i}x_jx_k\right)\\
&=\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}\left(x_i(s-x_i)+\sum_{1\le j<k\le 2018,j\ne i,k\ne i}x_jx_k\right)\\
&=\sum_{i=1}^{2018}x_i+\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s-x_i}\cdot\sum_{1\le j<k\le 2018,j\ne i,k\ne i}x_jx_k\\
&\ge s+\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{s}\cdot\sum_{1\le j<k\le 2018,j\ne i,k\ne i}x_jx_k\\
&=s+\frac{2016}{s}\ge 2\sqrt{2016}.
\end{aligned}$$

当 $x_1+x_2=\sqrt{2016}, x_1x_2=1, x_3=x_4=\cdots=x_{2018}=0$ 时取到等号. □

解法 2 (雅礼中学陈子云) 不妨设 x_1, x_2 为 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$ 中最大的两个. 注意到

$$s^2 - \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 = 2 \sum_{1 \le i < j \le 2018} x_i x_j = 2$$

和

$$\sum_{i=3}^{2018} x_i^2 \le \sum_{i=3}^{2018} x_2 x_i = x_2 \cdot \sum_{i=3}^{2018} x_i = x_2(s - x_1 - x_2),$$

故

$$\begin{aligned} 2 = s^2 - \sum_{i=1}^{2018} x_i^2 &\ge s^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_2(s - x_1 - x_2) \\ &= s^2 - sx_2 - x_1^2 + x_1 x_2 = (s - x_1)(s + x_1 - x_2). \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{s-x_1} \ge \frac{s+x_1-x_2}{2}$. 同理, $\frac{1}{s-x_2} \ge \frac{s+x_2-x_1}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{s - x_i} &= \frac{1}{s - x_1} + \frac{1}{s - x_2} + \sum_{i=3}^{2018} \frac{1}{s - x_i} \\ &\ge \frac{s + x_1 - x_2}{2} + \frac{s + x_2 - x_1}{2} + \frac{2016}{s} \\ &= s + \frac{2016}{s} \ge 2\sqrt{2016} = 24\sqrt{14}. \end{aligned}$$

当 $x_1 = \frac{\sqrt{2016}-\sqrt{2012}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2016}+\sqrt{2012}}{2}, x_3 = x_4 = \cdots = x_{2018} = 0$ 时可以取到等号.

综上, 所求的最小值为 $24\sqrt{14}$. □

评注 这是一道相当困难的不等式问题, 考试中约 2% 的同学做对此题. 首先要猜出取等条件, 可以把序列中 2016 项取为 0, 剩下两项待定系数来确定最小值. 下界的证明非常困难.

解法 1 先要对原式做恒等变形, 通过观察取等条件把 $\frac{1}{s-x_i}$ 放缩为 $\frac{1}{s}$, 最后用均值不等式证得了结论.

解法 2 采用优化的思想, 选取 x_i 中最大的两个元, 并建立对应的局部不等式, 并将其他 $\frac{1}{s-x_i}$ 放缩为 $\frac{1}{s}$, 再利用均值不等式得到结果.

对于 $n \ge 2$ 个实数的情形. 当 $n \ge 6$ 时, 上述方法仍然有效; 在 $n < 6$ 时, 上述两个方法无法取等, 需要对 s 与 2 的大小进行分类处理.

题 6. 设 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{999}$ 是平面上两两不同的点, 且无三点共线. 问: 点 A_0 最多是多少个三角形 $A_iA_jA_k (1 \le i < j < k \le 999)$ 的内点.

解法 1 我们考虑更一般的情形: 假设平面上有 $2n+2$ 个不同的点 $A_0, A_1, A_2,$

$\cdots, A_{2n+1}$, 且无三点共线, 设此时 A_0 至多是 a_n 个三角形 $A_iA_jA_k(1 \le i < j < k \le 2n+1)$ 的内点. 我们证明 $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

首先给出构造. 取 A_i 为一正 $2n+1$ 边形顺次排列的 $2n+1$ 个顶点, A_0 为其圆心. 若 A_0 在三角形 $A_1A_iA_j$ 内, 不妨设 $i < j$, 那么 $i \le n+1$. 注意到固定 i 时, j 有 $i-1$ 种选择: $n+2, \cdots, n+i$. 故总共的三角形数为 $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. 由对称性, A_0 在

$$\frac{1}{3} \cdot (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

个三角形之中.

另一方面, 我们证明 $a_n \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 事实上, 只需证明必然存在两个顶点, A_0 至多在 n^2 个含这两个顶点作为顶点的三角形中. $(*)$

此时有 $a_n \le a_{n-1} + n^2$, 易知 $a_1 = 1$, 故 $a_n \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

注意到点 A_0 在 $\triangle A_iA_jA_k$ 中等价于向量 $\overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j}, \overrightarrow{A_0A_k}$ 不能在一条过 A_0 的直线同侧, 即只与向量 $\overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j}, \overrightarrow{A_0A_k}$ 的方向有关, 故我们可以作一个充分大的圆并延长射线 A_0A_i 交圆于 B_i, 用 B_i 代替 A_i, 于是我们可以假设所有 A_i 共圆, 且圆心为 A_0.

假设 $\angle A_iA_0A_j$ 中最大的是 $\angle A_1A_0A_2$, 我们证明这两个顶点就符合要求. 设劣弧 A_1A_2 上有 A_i 中 a 个点, 优弧 A_1A_2 上有 A_i 中 b 个点, 则 $a + b = 2n - 1$.

若 A_0 在三角形 $A_1A_2A_i$ 内, 那么 A_i 在优弧 A_1A_2 上, 这样的三角形至多有 b 个. 若 A_0 在同一段弧上的两个点与 A_1 作为三个顶点的三角形的内部, 那么这两个点必然在直线 A_0A_1 异侧, 于是只能在优弧 A_1A_2 上. 那么, 这两个点中与 A_2 在直线 A_0A_1 同侧的点,不妨设为 A_3, 必然在劣弧 A_2T 上, 其中 T 为 A_1 的对径点, 故 $\angle A_1A_0A_3 > \angle A_1A_0A_2$, 矛盾.

同理, A_0 也不可能在同一段弧上的两个点与 A_2 作为三个顶点的三角形的内部.

对于在不同两段弧上的两点 A_i, A_j, 且 A_1, A_i, A_2, A_j 在圆上顺次排列, 故 A_0 只能在三角形 $A_1A_iA_j$ 和三角形 $A_2A_iA_j$ 之一中,这样的三角形至多有 ab 个. 那么, A_0 至多在

$$b + ab = b(a+1) \le \frac{(a+b+1)^2}{4} = n^2$$

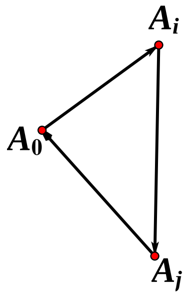
个含这两个顶点作为顶点的三角形中, 这就证明了命题.

特别地, 本题的答案即 $a_{499} = 41541750$. □

解法 2 (浙江省杭州第二中学黄启昀) 点 A_0 在 $\triangle A_iA_jA_k$ 中等价于向量

$\overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j}, \overrightarrow{A_0A_k}$ 不能在一条过 A_0 的直线同侧, 即只与向量 $\overrightarrow{A_0A_i}, \overrightarrow{A_0A_j}, \overrightarrow{A_0A_k}$ 的方向有关, 故我们可以作一个充分大的圆并延长射线 A_0A_i 交圆于 B_i, 用 B_i 代替 A_i, 于是我们可以假设所有 A_i 共圆, 且圆心为 A_0.

定义 3−圈为 $A \to B \to C \to A$ 的三点组 (A, B, C). 定义点对 (A, BC) 为同向点对, 若 $A \to B, A \to C$ 或者 $B \to A, C \to A$.



在 $A_i, A_j (i \neq j)$ 连一条有向边当且仅当 A_0, A_i, A_j 按顺时针方向构成三角形的三个顶点, 则 $\triangle A_iA_jA_k$ 包含 A_0 等价于 A_i, A_j, A_k 为一个 3−圈, 也等价于 A_i, A_j, A_k 无同向点对.

易知, $\triangle A_iA_jA_k$ 不包含 A_0 等价于 A_i, A_j, A_k 不构成 3−圈, 也等价于 A_i, A_j, A_k 含 2 个同向点对.

下面计算同向点对的个数.

设 A_i 的出度为 t_i, 则入度为 $998 - t_i$. 故同向点对的个数为

$$\sum_{i=1}^{999}\left(\binom{t_i}{2} + \binom{998 - t_i}{2}\right) = \sum_{i=1}^{999}\left(\frac{t_i^2 + (998 - t_i)^2}{2} - 499\right)$$
$$\geq 999 \cdot 2 \cdot \binom{499}{2}.$$

故 A_0 至少不是 $\frac{999 \cdot 2 \cdot \binom{499}{2}}{2} = 999 \cdot \binom{499}{2}$ 个三角形的内点.

从而 A_0 至多是 $\binom{999}{3} - 999 \cdot \binom{499}{2} = 41541750$ 个三角形的内点.

当 $A_i (1 \leq i \leq 999)$ 构成以 A_0 为中心的正 999 边形时, 等号成立. □

评注 这是一道有一定难度的组合几何问题, 考试中约 2% 的同学做对此题. 构造只需取正 $2n+1$ 边形的顶点和它的中心即可.

解法 1 把问题一般化为偶数个点的情形, 然后使用数学归纳法. 归纳过渡中要先把问题化简为其余 $2n+1$ 个点共圆且 A_0 是其圆心的情况, 然后找出形成最大圆弧的两个点, 再对圆的两段弧上的点所形成的包含 A_0 的三角形个数进行讨论就可以得出结论.

解法 2 先将问题等价转化为长度为 3 的有向圈的个数最大值问题, 由于不形成有向圈的三元组中恰有两个同向点对, 再对每一点引出的有向边形成的同向点个数对用柯西不等式进行下界估计(这里使用了典型的算两次手法), 这就得到了有向圈个数的上界估计.