数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

一道 IMO 代数预选题的推广

何振宇

(华中师范大学第一附属中学, 430223)

我们先看下面一道 IMO 预选题:

题 1. 求最大的实数 Q, 使得对于所有正整数 n 和所有实数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $(0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \geq Q \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{x_i}.$$

(第 57 届 IMO 预选题)

解 $Q_{\max} = \frac{4}{9}$.

一方面, 取 $x_i = \sum\limits_{k=1}^{i} k(k+1), i \geq 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{i(i+2)} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

这样, 要使原不等式成立, 必须

$$Q \leq \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

令 $n \to +\infty$, 得 $Q \leq \frac{4}{9}$.

另一方面, 只需考虑 $n \geq 2$ 的情况. 由 Cauchy 不等式, 知 $\forall 2 \leq i \leq n$, 有

$$\frac{9}{x_i - x_{i-1}} + \frac{(i-1)^2}{x_{i-1}} \geq \frac{(i+2)^2}{x_i}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&9\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} - 4\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{x_i} \\
=&\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{9}{x_i - x_{i-1}} + \frac{(i-1)^2}{x_{i-1}} - \frac{(i+2)^2}{x_i}\right) + \frac{n^2}{x_n} \geq 0.
\end{aligned}$$

收稿日期: 2018-09-26; 修订日期: 2018-12-13.

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\geq\frac{4}{9}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{x_i}. \qquad \square$$

在研究这道预选题时, 我们发现它与一个递归方程解的存在性等价.

如果存在一个无穷实数序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足递归方程

$$x_n=f(x_{n-1},\cdots,x_{n-k}), \tag{$*$}$$

其中 k 是某个小于 n 的正整数, 则称递归方程 $(*)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有解.

我们首先证明了如下命题:

命题 递归方程

$$\begin{cases} b_1=c \\ b_k=c+\sqrt{b_{k-1}^2-k} \end{cases} \tag{1}$$

在 $\mathbb{R}$ 上有解的充要条件是: 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall a_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n$ 有

$$c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{\sum\limits_{k=1}^{i}a_k}. \tag{2}$$

注意到上述命题中的递归方程 $b_k=c+\sqrt{b_{k-1}^2-k}$ 可重写为 $(b_k-c)^2=b_{k-1}^2-k$. 这启发我们研究更一般的递归方程 $(x_k-c)^2=x_{k-1}^2-f(k)$ 有解的条件. 因此, 我们建立了如下定理:

定理 设 $c>0, f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 且满足 $f(n)>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$, 则递归方程

$$\begin{cases} \Omega_1=c \\ (\Omega_n-c)^2=\Omega_{n-1}^2-f(n) \end{cases} \tag{3}$$

有解的充要条件是 $f(x)$ 恒为 $(0,c^2]$ 上的常数或 $f(x)=ux+v$, 其中 $u>0, v\geq 0$ 且满足

$$\frac{u}{2\sqrt{u+v}}+\sqrt{u+v}\leq c. \tag{4}$$

§1. 命题的证明

这一节, 我们给出命题的证明.

命题的证明 必要性: 若 (1) 成立, 记 $S_i=\sum\limits_{i=1}^{k}a_k$, 则由 Cauchy 不等式知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_i\in\mathbb{R}^+, i=1,\cdots,n$, 有

$$c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{S_i}=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{c^2}{a_i}+\frac{b_{i-1}^2-i}{S_{i-1}}-\frac{b_i^2}{S_i}\right)+\frac{(b_{n+1}-c)^2}{S_n}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{c^2}{a_i}+\frac{(b_i-c)^2}{S_{i-1}}-\frac{b_i^2}{S_i}\right)+\frac{(b_{n+1}-c)^2}{S_n}\geq 0.$$

充分性: 重复上节 IMO 预选题的解法, 知 (2) 成立当且仅当 $c\geq \frac{3}{2}$, 下面只需说明 (1) 成立等价于 $c\geq\frac{3}{2}$.

事实上, 假设 $0<c<\frac{3}{2}$.

考虑数列 $\left\{\frac{n+2}{2}\right\}$ (恰是 $c=\frac{3}{2}$ 时的 $\{b_n\}$) 与 $\{b_n\}$ 的对应项的差.

注意 $n\geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{2}-b_n=&\frac{n+2}{2}-c-\sqrt{b_{n-1}^2-n}\\ >&\frac{n-1}{2}-\sqrt{b_{n-1}^2-n}\\ =&\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2-(b_{n-1}^2-n)}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{b_{n-1}^2-n}}\\ =&\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-b_{n-1}^2}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{b_{n-1}^2-n}}\\ =&\left(\frac{n+1}{2}-b_{n-1}\right)\cdot\frac{\frac{n+1}{2}+b_{n-1}}{\frac{n-1}{2}+\sqrt{b_{n-1}^2-n}}.\end{aligned} \qquad ①$$

又 $\frac{1+2}{2}-b_1=\frac{3}{2}-c>0$, 故对 n 归纳易知 $\frac{n+2}{2}-b_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$. 从而 $b_{n-1}>\frac{n+1}{n-1}\cdot\sqrt{b_{n-1}^2-n}$. 再利用 ①式, 知

$$\frac{n+2}{2}-b_n>\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{n+1}{2}-b_{n-1}\right),\forall n\geq 2.$$

进而

$$\frac{n+2}{2}-b_n>\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{3}{2}-c\right)=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{3}{2}-c\right),\forall n\geq 2.$$

取 $n\in\mathbb{N}^*$ 使 $\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0(n_0+1)}\leq\frac{3}{2}-c$, 则 $b_{n_0}<0$. 但

$$b_{n_0}=c+\sqrt{b_{n_0-1}^2-n_0}\geq c>0,$$

矛盾! 这说明 (1) 成立, 必须 $c\geq\frac{3}{2}$.

另一方面, 若 $c\geq\frac{3}{2}$, 则对 n (加强) 归纳可证 $\{b_t\}_{t-1}^{n}$ 存在, 且 $b_n\geq\frac{1}{2}n+1$. 所以此时 (1) 成立.

综上, 充分性得证. □

§2. 定理的证明

定理的证明 (i) 当 $\deg f=0$ 时, 设 f 恒等于μ (μ 是正常数). 则

$$(\Omega_n-c)^2=\Omega_{n-1}^2-\mu,\forall n>1$$

有解的充要条件是 $\Omega_{n-1}\geq\sqrt{\mu}$.

特别地, Ω_2 存在的充要条件是 $\Omega_1 \geq \sqrt{\mu}$, 即 $c \geq \sqrt{\mu}$. 而 $c \geq \sqrt{\mu}$ 时, 对 n 归纳易证 $\{\Omega\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在. 因此 f 恒等于 μ (μ 是正常数) 对 $\{\Omega\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在的充要条件是 $c \geq \sqrt{\mu}$.

(ii)当 $\deg f \in \mathbb{N}^*$ 时, 因为 $f(n) > 0, \forall n > 0$, 故 $f(x)$ 的首项系数大于 0, 因此存在 $x_0 > 0$, 使 $f'(x) > 0, \forall x \geq x_0$. 从而存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $n_0 > 1$ 使得

$$f(n+1) \geq f(n),\ \forall n \geq n_0.$$

假设存在 $n_1 \geq n_0$, 使 $\Omega_{n_1} \leq \Omega_{n_1-1}$, 则

$$(\Omega_{n_1+1} - c)^2 - (\Omega_{n_1} - c)^2 = \Omega_{n_1}^2 - \Omega_{n_1-1}^2 - (f(n_1+1) - f(n_1)) \leq 0,$$

即 $\Omega_{n_1+1} \leq \Omega_{n_1}$. 从而

$$\Omega_{n_1-1} \geq \Omega_{n_1} \geq \Omega_{n_1+1} \geq \cdots .$$

由 $f(x)$ 的首项系数大于 0, 知存在 $\alpha \geq n_1$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ 使 $f(\alpha) > \Omega_{n_1-1}^2$, 那么 $f(\alpha) > \Omega_\alpha^2$, 于是

$$0 > \Omega_\alpha^2 - f(\alpha) = (\Omega_{\alpha+1} - c)^2,$$

矛盾! 从而 $\Omega_n \geq \Omega_{n-1}$, $\forall n \geq n_0$. 进而

$$\Omega_{n-1}^2 - f(n) = (\Omega_n - c)^2 \geq (\Omega_{n-1} - c)^2 \Rightarrow \Omega_{n-1} \geq \frac{1}{2c}(c^2 + f(n)),\ \forall n \geq n_0.$$

但

$$(\Omega_n - c)^2 = \Omega_{n-1}^2 - f(n) < \Omega_{n-1}^2 \Rightarrow \Omega_n < \Omega_{n-1} + c,\ \forall n > 1,$$

又 $\Omega_1 = c$, 故 $\Omega_n \leq nc$, $\forall n \geq 1$. 于是

$$(n-1)c \geq \Omega_{n-1} \geq \frac{1}{2c}(c^2 + f(n)),\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \deg f = 1.$$

设 $f(x) = ux + v$, 则 $u > 0$, $v \geq 0$. 记

$$S_n = \frac{u}{2\sqrt{u+v}} n + \sqrt{u+v},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

假设 $0 < c < S_1$, 则 $S_1 > \Omega_1$, 且

$$(S_n - c)^2 > (S_n - S_1)^2 = \frac{u^2}{4(u+v)}(n-1)^2 = S_{n-1}^2 - f(n),$$

从而

$$\begin{aligned}
S_n - \Omega_n &= S_n - c - (\Omega_n - c) > \sqrt{S_{n-1}^2 - f(n)} - \sqrt{\Omega_{n-1}^2 - f(n)} \\
&= (S_{n-1}^2 - \Omega_{n-1}^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{S_{n-1}^2 - f(n)} + \sqrt{\Omega_{n-1}^2 - f(n)}} \\
&= (S_{n-1} - \Omega_{n-1}) \frac{S_{n-1} + \Omega_{n-1}}{\sqrt{S_{n-1}^2 - f(n)} + \sqrt{\Omega_{n-1}^2 - f(n)}},\ \forall n > 1. \qquad (5)
\end{aligned}$$

又 $S_1 > \Omega_1$, 故对 n 归纳易证 $S_n > \Omega_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 进一步, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\Omega_n}{\sqrt{\Omega_n^2 - f(n+1)}} > \frac{S_n}{\sqrt{S_n^2 - f(n+1)}} \\
\Rightarrow &\frac{S_n + \Omega_n}{\sqrt{S_n^2 - f(n+1)} + \sqrt{\Omega_n^2 - f(n+1)}} > \frac{S_n}{\sqrt{S_n^2 - f(n+1)}} \\
= &\frac{\frac{u}{2\sqrt{u+v}} n + \sqrt{u+v}}{\frac{u}{2\sqrt{u+v}} n} = 1 + \frac{2u+2v}{u} \cdot \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

结合 (5) 知,

$$\begin{aligned}
&\frac{S_{n+1} - \Omega_{n+1}}{S_n - \Omega_n} > 1 + \frac{2u+2v}{u} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{2}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\
\Rightarrow &S_n - \Omega_n > \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{k}\right) (S_1 - \Omega_1) = \frac{n(n+1)}{2}(S_1 - c),\ \forall n > 1,
\end{aligned}$$

于是

$$\Omega_n < S_n - \frac{n(n+1)}{2}(S_1 - c),\ \forall n > 1.$$

注意右边是关于 n 的首项系数为负的二次函数, 故存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使

$$S_n - \frac{h(h+1)}{2}(S_1 - c) < 0,$$

所以 $\Omega_n < 0$, 矛盾! 因此 $c \geq S_1$.

当 $c \geq S_1$ 时, 对 m 归纳可证存在 $\{\Omega_n\}_{n=1}^m$, 且 $\Omega_m \geq S_m$. 故 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 存在.

综上所述, 递归方程有解的充要条件是 $f(x) = \mu$ ($\mu \in (0, c^2]$) 或 $f(x) = ux + v$ ($u > 0, v \geq 0$ 满足 $\frac{u}{2\sqrt{u+v}} + \sqrt{u+v} \leq c$). □