Figalli 不等式的最优系数

黄嘉俊

(上海市上海中学, 200231)

2018 菲尔茨奖得主 Figalli 在文 [1] 中, 利用分析方法建立了下述不等式:

定理 1 设实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 记

$$\lambda_A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k,\ \lambda_G = \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

则

$$7n^2(\lambda_A - \lambda_G) \geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_G)^2.$$

罗横溢和胡子轩在文 [2] 中, 用初等方法证明了上述不等式, 并且将系数 $7n^2$ 改进到了 $5n-4$.

我们将系数改进到了 $2n$, 并且这个系数是最佳的, 具体的, 我们证明了如下结果:

定理 2 设实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 记

$$\lambda_A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k,\ \lambda_G = \left(\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

则

$$2n(\lambda_A - \lambda_G) \geq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_G)^2, \tag{1}$$

且 $2n$ 是最优的系数.

证明 我们先证明一个引理:

引理 设 $c \geq 1$, 则对任意 $x \in (0, c]$, 均有

$$2c(x - \ln x - 1) \geq (x-1)^2. \tag{2}$$

修订日期: **2018-12-28.**

引理的证明 我们分两种情况证明.

若 $x \geq 1$, 则由 $x \leq c$ 知, 要证 (2), 只需证

$$2x - 2\ln x - 2 \geq x - 2 + \frac{1}{x},$$

这等价于

$$x - \frac{1}{x} - 2\ln x \geq 0.$$

令 $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$, 则 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \geq 0$. 故 $f(x) \geq f(1) = 0$, 此时命题成立.

若 $0 < x < 1$, 由于 $c \geq 1$, 故要证 (2), 只需证

$$2x - 2\ln x - 2 \geq x^2 - 2x + 1.$$

令 $f(x) = -x^2 + 4x - 3 - 2\ln x$, 则 $f'(x) = -2x + 4 - \frac{2}{x} \leq 0$, 故 $f(x) \geq f(1) = 0$. 此时命题成立.

综上知引理成立.

回到原题. 注意到 (1) 是齐次的, 故不妨设 $\lambda_G = 1$, 即 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 1$. 则 (1) 等价于

$$2\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - n\right)\lambda_n \geq \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - 1)^2.$$

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\lambda_k = 0$, 上式等价于

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \ln\lambda_k - 1\right)\lambda_n \geq \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - 1)^2.$$

从而只需证明局部不等式:

$$2\left(\lambda_k - \ln\lambda_k - 1\right)\lambda_n \geq (\lambda_k - 1)^2.$$

由 λ_n 的最大性和 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = 1$ 知 $\lambda_n \geq 1$, 结合引理知, 上述局部不等式成立. 从而 (1) 式成立.

下面说明系数 $2n$ 是最优的.

设最优系数为 c.

取 $\lambda_n = x^n (x > 1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$, 则 $\lambda_A = \frac{x^n+n-1}{n}, \lambda_G = x$. 从而

$$c \cdot \frac{x^n - nx + n - 1}{n} \cdot x^n \geq (1-x)^2(n-1) + (x^n - x)^2,$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow c\cdot\frac{x^n(x-1)^2(x^{n-2}+2x^{n-3}+\cdots+n-1)}{n}\\
&\quad\geq (x-1)^2\left(n-1+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x)^2\right)
\end{aligned}
$$

当 $n\geq 2$ 时, 令 $x\to 1^+$ 得

$$
c\cdot\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n}\geq n-1+(n-1)^2=n(n-1),
$$

即 $c\geq 2n$.

综上知定理成立. □

致谢 作者感谢王广廷老师的指导!

参考文献

[1] Figalli, A.; Maggi, F.; Pratelli, A. A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities. Invent. Math. 182 (2010), no. 1, 167 - 211.

[2] 罗横溢, 胡子轩. Figalli不等式的初等证明 [J]. 数学新星网 · 学生专栏, 2018-12-13 期.